Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik
Dr. Florian Berchtold

Übungen zur Geometrie — Blatt 4

Abgabe: Freitag(!!), 31.5.2019, in den Briefkasten Nr. 9

Aufgabe 4.1 Es seien A, B, P paarweise verschiedene Punkte der Geraden AB. Für das Teilverhältnis $[P; A, B]$ von P bzgl. (A, B) zeige man:

a) Das Teilverhältnis von P bzgl. (B, A) ist der Kehrwert des Teilverhältnisses von P bzgl. (A, B):

$$[P; B, A] = \frac{1}{[P; A, B]}$$

.

b) Der Punkt P liegt genau dann zwischen A und B, wenn $[P; A, B] > 0$ gilt.

c) Es gilt

$$\frac{|AP|}{|BP|} = \big|[P; A, B]\big|.$$

Aufgabe 4.2 Es seien ABC ein euklidisches Dreieck und M_{AB}, M_{BC} sowie M_{AC} die Mittelpunkte der Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$. Weiter mögen die Punkte C', $C'' \in \overline{AB}$, A, $A'' \in \overline{BC}$ sowie B', $B'' \in \overline{AC}$ so liegen, dass M_{AB}, M_{BC} und M_{AC} auch die Mittelpunkte von $\overline{C'C''}$, $\overline{A'A''}$ sowie $\overline{B'B''}$ seien. Man zeige, dass sich die Geraden AA', BB' und CC' genau dann in einem Punkt schneiden, wenn sich die Geraden AA'', BB'' und CC'' in einem Punkt schneiden.

Aufgabe 4.3 Es seien ABC ein euklidisches Dreieck und $A' \in \overline{BC}$, $B' \in \overline{CA}$ sowie $C' \in \overline{AB}$ Punkte auf den Dreiecksseiten. Weiter seien g_a, g_b und g_c die Orthogonalen zu den jeweiligen Dreiecksseiten durch die Punkte A', B' sowie C'. Zeigen Sie, dass sich g_a, g_b und g_c genau dann in einem Punkt schneiden, wenn

$$|AC'|^2 + |BA'|^2 + |CB'|^2 = |A'C|^2 + |B'A|^2 + |C'B|^2$$

gilt.

Aufgabe 4.4 Es sei ABC ein Dreieck mit Seitenlängen $a := |BC|$ und $b := |AC|$. Weiter sei w_C die Innenwinkelhalbierende des Winkels $\angle ACB$ und $W_C := AB \cap w_C$. Zeigen Sie:

a) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{|BW_C|}{|AW_C|}$,

b) Mit $\gamma := \sphericalangle ACB$ gilt

$$|CW_C| = \frac{2ab\cos(\frac{\gamma}{2})}{a+b}.$$

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik
Dr. Florian Berchtold

Übungen zur Geometrie — Blatt 4

Abgabe: Freitag(!!), 31.5.2019, in den Briefkasten Nr. 9

Aufgabe 4.1 Es seien A, B, P paarweise verschiedene Punkte der Geraden AB. Für das Teilverhältnis $[P; A, B]$ von P bzgl. (A, B) zeige man:

a) Das Teilverhältnis von P bzgl. (B, A) ist der Kehrwert des Teilverhältnisses von P bzgl. (A, B):

$$[P; B, A] = \frac{1}{[P; A, B]}$$

.

b) Der Punkt P liegt genau dann zwischen A und B, wenn $[P; A, B] > 0$ gilt.

c) Es gilt

$$\frac{|AP|}{|BP|} = \big|[P; A, B]\big|.$$

Aufgabe 4.2 Es seien ABC ein euklidisches Dreieck und M_{AB}, M_{BC} sowie M_{AC} die Mittelpunkte der Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$. Weiter mögen die Punkte C', $C'' \in \overline{AB}$, A, $A'' \in \overline{BC}$ sowie B', $B'' \in \overline{AC}$ so liegen, dass M_{AB}, M_{BC} und M_{AC} auch die Mittelpunkte von $\overline{C'C''}$, $\overline{A'A''}$ sowie $\overline{B'B''}$ seien. Man zeige, dass sich die Geraden AA', BB' und CC' genau dann in einem Punkt schneiden, wenn sich die Geraden AA'', BB'' und CC'' in einem Punkt schneiden.

Aufgabe 4.3 Es seien ABC ein euklidisches Dreieck und $A' \in \overline{BC}$, $B' \in \overline{CA}$ sowie $C' \in \overline{AB}$ Punkte auf den Dreiecksseiten. Weiter seien g_a, g_b und g_c die Orthogonalen zu den jeweiligen Dreiecksseiten durch die Punkte A', B' sowie C'. Zeigen Sie, dass sich g_a, g_b und g_c genau dann in einem Punkt schneiden, wenn

$$|AC'|^2 + |BA'|^2 + |CB'|^2 = |A'C|^2 + |B'A|^2 + |C'B|^2$$

gilt.

Aufgabe 4.4 Es sei ABC ein Dreieck mit Seitenlängen $a := |BC|$ und $b := |AC|$. Weiter sei w_C die Innenwinkelhalbierende des Winkels $\angle ACB$ und $W_C := AB \cap w_C$. Zeigen Sie:

a) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{|BW_C|}{|AW_C|}$,

b) Mit $\gamma := \sphericalangle ACB$ gilt

$$|CW_C| = \frac{2ab\cos(\frac{\gamma}{2})}{a+b}.$$