

Übungen zur Geometrie — Blatt 6

Abgabe: Donnerstag, 27.6.2019, in den Briefkasten Nr. 9

Aufgabe 6.1 Es sei ABC ein Eulersches Dreieck mit zugehörigem Poldreieck $P_AP_BP_C$. Wie üblich seien $a := d(B, C)$, $c := d(A, B)$ sowie α der Innenwinkel des Dreiecks ABC bei A . Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) Der Flächeninhalt des Eulerschen Dreiecks ABP_C beträgt $F_{ABP_C} = c$.

b)
$$\frac{\det(ABC)}{\det(P_AP_BP_C)} = \frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)}.$$

Aufgabe 6.2 Es sei ABC ein Eulersches Dreieck in üblicher Notation, d.h. mit Seitenlängen a, b und c sowie Innenwinkeln α, β und γ . Die Größen $U := a+b+c$ und $W := \alpha+\beta+\gamma$ heißen *Umfang* und *Winkelsumme* des Dreiecks ABC . Zeigen Sie die Ungleichungen

$$0 < U < 2\pi \quad \text{und} \quad \pi < W < 3\pi$$

sowie, dass diese Ungleichungen scharf sind.

Aufgabe 6.3 Es sei ABC ein Eulersches Dreieck und s_A die Länge der Seitenhalbierende der Seite BC (d.h. die Strecke von A zum Mittelpunkt M_{BC} von B und C). Zeigen Sie, dass für die Länge $s_A := d(A, M_{BC})$ gilt

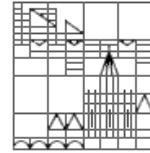
$$\cos(s_A) = \frac{\cos(b) + \cos(c)}{2 \cos\left(\frac{a}{2}\right)}.$$

Aufgabe 6.4 Es sei $\pi: \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ die Äquivalenzklassenprojektion, $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ eine reguläre 2×2 -Matrix mit Determinante $\det(A) = 1$ sowie $M_A: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ die zugehörige Möbiustransformation. Zeigen Sie:

1) Ein Vektor $v \in \mathbb{C}^2$ ist genau dann Eigenvektor von A , wenn $\pi(v)$ Fixpunkt von M_A ist.

2) Ist $v \in \mathbb{C}^2$ (mit $\pi(v) \neq \infty$) Eigenvektor von A zum Eigenwert λ , so gilt

$$M'(\pi(v)) = \frac{1}{\lambda^2}.$$



Übungen zur Geometrie — Blatt 6

Abgabe: Donnerstag, 27.6.2019, in den Briefkasten Nr. 9

Aufgabe 6.1 Es sei ABC ein Eulersches Dreieck mit zugehörigem Poldreieck $P_AP_BP_C$. Wie üblich seien $a := d(B, C)$, $c := d(A, B)$ sowie α der Innenwinkel des Dreiecks ABC bei A . Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) Der Flächeninhalt des Eulerschen Dreiecks ABP_C beträgt $F_{ABP_C} = c$.

b)
$$\frac{\det(ABC)}{\det(P_AP_BP_C)} = \frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)}.$$

Aufgabe 6.2 Es sei ABC ein Eulersches Dreieck in üblicher Notation, d.h. mit Seitenlängen a, b und c sowie Innenwinkeln α, β und γ . Die Größen $U := a+b+c$ und $W := \alpha+\beta+\gamma$ heißen *Umfang* und *Winkelsumme* des Dreiecks ABC . Zeigen Sie die Ungleichungen

$$0 < U < 2\pi \quad \text{und} \quad \pi < W < 3\pi$$

sowie, dass diese Ungleichungen scharf sind.

Aufgabe 6.3 Es sei ABC ein Eulersches Dreieck und s_A die Länge der Seitenhalbierende der Seite BC (d.h. die Strecke von A zum Mittelpunkt M_{BC} von B und C). Zeigen Sie, dass für die Länge $s_A := d(A, M_{BC})$ gilt

$$\cos(s_A) = \frac{\cos(b) + \cos(c)}{2 \cos\left(\frac{a}{2}\right)}.$$

Aufgabe 6.4 Es sei $\pi: \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ die Äquivalenzklassenprojektion, $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ eine reguläre 2×2 -Matrix mit Determinante $\det(A) = 1$ sowie $M_A: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ die zugehörige Möbiustransformation. Zeigen Sie:

1) Ein Vektor $v \in \mathbb{C}^2$ ist genau dann Eigenvektor von A , wenn $\pi(v)$ Fixpunkt von M_A ist.

2) Ist $v \in \mathbb{C}^2$ (mit $\pi(v) \neq \infty$) Eigenvektor von A zum Eigenwert λ , so gilt

$$M'(\pi(v)) = \frac{1}{\lambda^2}.$$