

## Übungen zur Geometrie — Blatt 6

Abgabe: Donnerstag, 27.6.2019, in den Briefkasten Nr. 9

**Aufgabe 6.1** Es sei  $ABC$  ein Eulersches Dreieck mit zugehörigem Poldreieck  $P_AP_BP_C$ . Wie üblich seien  $a := d(B, C)$ ,  $c := d(A, B)$  sowie  $\alpha$  der Innenwinkel des Dreiecks  $ABC$  bei  $A$ . Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) Der Flächeninhalt des Eulerschen Dreiecks  $ABP_C$  beträgt  $F_{ABP_C} = c$ .

b) 
$$\frac{\det(ABC)}{\det(P_AP_BP_C)} = \frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)}.$$

**Aufgabe 6.2** Es sei  $ABC$  ein Eulersches Dreieck in üblicher Notation, d.h. mit Seitenlängen  $a, b$  und  $c$  sowie Innenwinkeln  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$ . Die Größen  $U := a+b+c$  und  $W := \alpha+\beta+\gamma$  heißen *Umfang* und *Winkelsumme* des Dreiecks  $ABC$ . Zeigen Sie die Ungleichungen

$$0 < U < 2\pi \quad \text{und} \quad \pi < W < 3\pi$$

sowie, dass diese Ungleichungen scharf sind.

**Aufgabe 6.3** Es sei  $ABC$  ein Eulersches Dreieck und  $s_A$  die Länge der Seitenhalbierende der Seite  $BC$  (d.h. die Strecke von  $A$  zum Mittelpunkt  $M_{BC}$  von  $B$  und  $C$ ). Zeigen Sie, dass für die Länge  $s_A := d(A, M_{BC})$  gilt

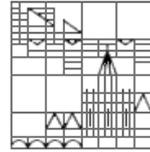
$$\cos(s_A) = \frac{\cos(b) + \cos(c)}{2 \cos\left(\frac{a}{2}\right)}.$$

**Aufgabe 6.4** Es sei  $\pi: \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  die Äquivalenzklassenprojektion,  $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  eine reguläre  $2 \times 2$ -Matrix mit Determinante  $\det(A) = 1$  sowie  $M_A: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  die zugehörige Möbiustransformation. Zeigen Sie:

1) Ein Vektor  $v \in \mathbb{C}^2$  ist genau dann Eigenvektor von  $A$ , wenn  $\pi(v)$  Fixpunkt von  $M_A$  ist.

2) Ist  $v \in \mathbb{C}^2$  (mit  $\pi(v) \neq \infty$ ) Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$ , so gilt

$$M'(\pi(v)) = \frac{1}{\lambda^2}.$$



## Übungen zur Geometrie — Blatt 6

Abgabe: Donnerstag, 27.6.2019, in den Briefkasten Nr. 9

**Aufgabe 6.1** Es sei  $ABC$  ein Eulersches Dreieck mit zugehörigem Poldreieck  $P_AP_BP_C$ . Wie üblich seien  $a := d(B, C)$ ,  $c := d(A, B)$  sowie  $\alpha$  der Innenwinkel des Dreiecks  $ABC$  bei  $A$ . Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) Der Flächeninhalt des Eulerschen Dreiecks  $ABP_C$  beträgt  $F_{ABP_C} = c$ .

b) 
$$\frac{\det(ABC)}{\det(P_AP_BP_C)} = \frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)}.$$

**Aufgabe 6.2** Es sei  $ABC$  ein Eulersches Dreieck in üblicher Notation, d.h. mit Seitenlängen  $a, b$  und  $c$  sowie Innenwinkeln  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$ . Die Größen  $U := a+b+c$  und  $W := \alpha+\beta+\gamma$  heißen *Umfang* und *Winkelsumme* des Dreiecks  $ABC$ . Zeigen Sie die Ungleichungen

$$0 < U < 2\pi \quad \text{und} \quad \pi < W < 3\pi$$

sowie, dass diese Ungleichungen scharf sind.

**Aufgabe 6.3** Es sei  $ABC$  ein Eulersches Dreieck und  $s_A$  die Länge der Seitenhalbierende der Seite  $BC$  (d.h. die Strecke von  $A$  zum Mittelpunkt  $M_{BC}$  von  $B$  und  $C$ ). Zeigen Sie, dass für die Länge  $s_A := d(A, M_{BC})$  gilt

$$\cos(s_A) = \frac{\cos(b) + \cos(c)}{2 \cos\left(\frac{a}{2}\right)}.$$

**Aufgabe 6.4** Es sei  $\pi: \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  die Äquivalenzklassenprojektion,  $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  eine reguläre  $2 \times 2$ -Matrix mit Determinante  $\det(A) = 1$  sowie  $M_A: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  die zugehörige Möbiustransformation. Zeigen Sie:

1) Ein Vektor  $v \in \mathbb{C}^2$  ist genau dann Eigenvektor von  $A$ , wenn  $\pi(v)$  Fixpunkt von  $M_A$  ist.

2) Ist  $v \in \mathbb{C}^2$  (mit  $\pi(v) \neq \infty$ ) Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$ , so gilt

$$M'(\pi(v)) = \frac{1}{\lambda^2}.$$