Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik
Dr. Florian Berchtold

Übungen zur Geometrie — Blatt 6

Abgabe: Donnerstag, 27.6.2019, in den Briefkasten Nr. 9

Aufgabe 6.1 Es sei ABC ein Eulersches Dreieck mit zugehörigem Poldreieck $P_A P_B P_C$. Wie üblich seien $a := d(B, C)$, $c := d(A, B)$ sowie α der Innenwinkel des Dreiecks ABC bei A. Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) Der Flächeninhalt des Eulerschen Dreiecks ABP_C beträgt $F_{ABP_C} = c$.

b) $\dfrac{\det(ABC)}{\det(P_A P_B P_C)} = \dfrac{\sin(a)}{\sin(\alpha)}$.

Aufgabe 6.2 Es sei ABC ein Eulersches Dreieck in üblicher Notation, d.h. mit Seitenlängen a, b und c sowie Innenwinkeln α, β und γ. Die Größen $U := a+b+c$ und $W := \alpha+\beta+\gamma$ heißen *Umfang* und *Winkelsumme* des Dreiecks ABC. Zeigen Sie die Ungleichungen

$$0 < U < 2\pi \quad \text{und } \pi < W < 3\pi$$

sowie, dass diese Ungleichungen scharf sind.

Aufgabe 6.3 Es sei ABC ein Eulersches Dreieck und s_A die Länge der Seitenhalbierende der Seite BC (d.h. die Strecke von A zum Mittelpunkt M_{BC} von B und C. Zeigen Sie, dass für die Länge $s_A := d(A, M_{BC})$ gilt

$$cos(s_A) = \frac{\cos(b) + \cos(c)}{2\cos\left(\frac{a}{2}\right)}.$$

Aufgabe 6.4 Es sei $\pi\colon \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \to \widehat{\mathbb{C}}$ die Äquivalenzklassenprojektion, $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ eine reguläre 2×2-Matrix mit Determinante $\det(A) = 1$ sowie $M_A\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ die zugehörige Möbiustransformation. Zeigen Sie:

1) Ein Vektor $v \in \mathbb{C}^2$ ist genau dann Eigenvektor von A, wenn $\pi(v)$ Fixpunkt von M_A ist.

2) Ist $v \in \mathbb{C}^2$ (mit $\pi(v) \neq \infty$) Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, so gilt

$$M'(\pi(v)) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik
Dr. Florian Berchtold

Übungen zur Geometrie — Blatt 6

Abgabe: Donnerstag, 27.6.2019, in den Briefkasten Nr. 9

Aufgabe 6.1 Es sei ABC ein Eulersches Dreieck mit zugehörigem Poldreieck $P_A P_B P_C$. Wie üblich seien $a := d(B,C)$, $c := d(A,B)$ sowie α der Innenwinkel des Dreiecks ABC bei A. Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) Der Flächeninhalt des Eulerschen Dreiecks ABP_C beträgt $F_{ABP_C} = c$.

b) $\dfrac{\det(ABC)}{\det(P_A P_B P_C)} = \dfrac{\sin(a)}{\sin(\alpha)}$.

Aufgabe 6.2 Es sei ABC ein Eulersches Dreieck in üblicher Notation, d.h. mit Seitenlängen a, b und c sowie Innenwinkeln α, β und γ. Die Größen $U := a+b+c$ und $W := \alpha+\beta+\gamma$ heißen *Umfang* und *Winkelsumme* des Dreiecks ABC. Zeigen Sie die Ungleichungen

$$0 < U < 2\pi \quad \text{und } \pi < W < 3\pi$$

sowie, dass diese Ungleichungen scharf sind.

Aufgabe 6.3 Es sei ABC ein Eulersches Dreieck und s_A die Länge der Seitenhalbierende der Seite BC (d.h. die Strecke von A zum Mittelpunkt M_{BC} von B und C. Zeigen Sie, dass für die Länge $s_A := d(A, M_{BC})$ gilt

$$cos(s_A) = \frac{\cos(b) + \cos(c)}{2\cos\left(\frac{a}{2}\right)}.$$

Aufgabe 6.4 Es sei $\pi\colon \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \to \widehat{\mathbb{C}}$ die Äquivalenzklassenprojektion, $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ eine reguläre 2×2-Matrix mit Determinante $\det(A) = 1$ sowie $M_A\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ die zugehörige Möbiustransformation. Zeigen Sie:

1) Ein Vektor $v \in \mathbb{C}^2$ ist genau dann Eigenvektor von A, wenn $\pi(v)$ Fixpunkt von M_A ist.

2) Ist $v \in \mathbb{C}^2$ (mit $\pi(v) \neq \infty$) Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, so gilt

$$M'(\pi(v)) = \frac{1}{\lambda^2}.$$