Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2019/2020

Alexander Taveira Blomenhofer
Markus Schweighofer

Übungsblatt 5 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 1. Sei $C|K$ eine Körpererweiterung und C algebraisch abgeschlossen. Zeige:

$$\mathbb{A} \not\cong \mathbb{A}^2$$

Aufgabe 2. Seien $C|K$ eine Körpererweiterung, C algebraisch abgeschlossen, $m, n \in \mathbb{N}_0$, V_1 und V_2 affine K-Untervarietäten von $\mathbb{A}^m$ und W_1 und W_2 affine K-Untervarietäten von $\mathbb{A}^n$ mit

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset, \quad W_1 \cap W_2 = \emptyset, \quad V_1 \cong W_1 \quad \text{und} \quad V_2 \cong W_2.$$

Zeige $V_1 \cup V_2 \cong W_1 \cup W_2$.

Aufgabe 3. Betrachte für jeden algebraisch abgeschlossenen Körper C die zugehörige *Neilesche Parabel*

$$N := V(Y^2 - X^3) = \{(x, y) \in C^2 \mid x^3 = y^2\} \subseteq C^2 = \mathbb{A}^2$$

und den affinen Raum $\mathbb{A}$ jeweils als C-Varietät. Finde einen algebraisch abgeschlossenen Körper C, für den es sowohl einen bijektiven Morphismus von $\mathbb{A}$ nach N als auch von N nach $\mathbb{A}$ gibt und für den trotzdem $\mathbb{A} \not\cong N$ gilt.

Aufgabe 4. Sei $K = \mathbb{F}_p$, C ein algebraisch abgeschlossener Oberkörper von K und $\mathbb{A} := C$.

(a) Ist $C \to C,\ x \mapsto x^p$ ein K-Algebrenisomorphismus?

(b) Ist $\mathbb{A} \to \mathbb{A},\ x \mapsto x^p$ ein Isomorphismus affiner K-Varietäten?

Abgabe bis Freitag, den 29. November 2019, 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.