Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2019/2020

Alexander Taveira Blomenhofer
Markus Schweighofer

Übungsblatt 7 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 1. Seien K ein Körper, I ein Ideal von $K[\underline{X}]$ und $f \in K[\underline{X}]$. Bezeichne J das von

$$I \cup \{Tf - 1\}$$

erzeugte Ideal im Polynomring $K[\underline{X}, T]$, wobei T eine weitere Unbestimmte sei. Zeige

$$f \in \sqrt{I} \iff 1 \in J$$

(a) mit einem möglichst kurzen Beweis, der den Hilbertschen Nullstellensatz verwendet,

(b) nur unter Verwendung der Begriffe und Sätze aus der einführenden Algebravorlesung des dritten Semesters.

Aufgabe 2. Zeige oder widerlege: Sind K ein Körper, $n \in \mathbb{N}_0$, $\leq$ eine Monomordnung auf $[\underline{X}]$, I ein Ideal von $K[\underline{X}]$ und G, H Gröbnerbasen von I bezüglich $\leq$, dann ist $G \cup H$ auch eine Gröbnerbasis von I bezüglich $\leq$.

Aufgabe 3. Fixiere die gradlexikographische Monomordnung auf $[X, Y]$ mit $X > Y$. Seien

$$f = X^2 - 1 \quad \text{und} \quad g = Y^2 - 2XY + 1,$$

$F := \{f, g\} \subseteq \mathbb{Q}[X, Y]$ und $h := X^2Y^3 - 2XY + X$. Finde verschiedene modulo F reduzierte $p, q \in \mathbb{Q}[X, Y]$ mit $h \xrightarrow[F]{*} p$ und $h \xrightarrow[F]{*} q$ und führe jeweils die Reduktion explizit per Hand durch.

Aufgabe 4. Betrachte die Polynome

$$\begin{aligned} f &:= Z - 2Y - X^2, \\ g &:= 6Y^2 + 5X^2Y - 4Y + X^4 - 2X^2 \quad \text{und} \\ h &:= 6Y^2 f - Zg \end{aligned}$$

in $\mathbb{Q}[X, Y, Z]$. Finde jeweils eine Monomordnung $\leq$ auf $[X, Y, Z]$

(a) derart, dass $h \xrightarrow[\{f,g\}]{*} 0$,

(b) und ein $r \in \text{red}_{\leq}(\{f, g\}) \setminus \{0\}$ mit $h \xrightarrow[\{f,g\}]{*} r$.

Abgabe bis Freitag, den 13. Dezember 2019, 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.