Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2019/2020

Alexander Taveira Blomenhofer
Markus Schweighofer

Übungsblatt 9 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 1. Wir definieren auf $\mathbb{R}^4$ die Multiplikation

$$\begin{pmatrix} a \\ u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ab - \langle u, v \rangle \\ av + bu + u \times v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

für $a, b \in \mathbb{R}, u, v \in \mathbb{R}^3$. Hierbei ist ab das gewöhnliche Produkt der reellen Zahlen a und b, av das Skalarprodukt des Skalars a mit dem Vektor v, bu das Skalarprodukt des Skalars b mit dem Vektor u und

$$u \times v := \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$$

das Kreuzprodukt der Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^3$. Für alle $a \in \mathbb{R}$ und $u \in \mathbb{R}^3$ nennen wir

$$\begin{pmatrix} a \\ u \end{pmatrix}^* := \begin{pmatrix} a \\ -u \end{pmatrix}$$

das zu $\begin{pmatrix} a \\ u \end{pmatrix}$ *konjugierte* Quadrupel.

(a) Zeige, dass der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^4$ vermöge der eingeführten Multiplikation zu einer nichtkommutativen $\mathbb{R}$-Algebra A wird. Benutze dabei ein Singular-Skript für den Nachweis der Assoziativität der Multiplikation. Dazu kann es hilfreich sein, den Befehl `subst` (der eine Variable ersetzen kann), aber vor allem den Datentyp `map` zu verwenden (der Einsetzungshomomorphismen implementiert).

(b) Identifiziere im folgenden $\mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\mathbb{R}^9$, etwa indem Du die Einträge der Matrix in kanonischer Reihenfolge ausliest. Für einen Vektorraumendomorphismus f des Untervektorraums $\{0\} \times \mathbb{R}^3$ von $\mathbb{R}^4$ bezeichne $M(f) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ dessen Darstellungsmatrix bezüglich der kanonischen Basis e_2, e_3, e_4. Berechne mit Satz 2.7.7 und einem Singular-Skript Erzeuger eines Ideals J von $\mathbb{Q}[\underline{Y}] = \mathbb{Q}[Y_{11}, Y_{12}, Y_{13}, Y_{21}, Y_{22}, Y_{23}, Y_{31}, Y_{32}, Y_{33}]$ derart, dass $V(J) \cap \mathbb{R}^9$ der Zariskiabschluss des Bildes von

$$\varphi\colon \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^{3\times 3} = \mathbb{R}^9,\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto M \begin{pmatrix} \{0\} \times \mathbb{R}^3 \to \{0\} \times \mathbb{R}^3 \\ u \mapsto \dfrac{xux^*}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} \end{pmatrix}.$$

in $\mathbb{R}^9$ ist. Zeige mit einer Variante von Satz 2.7.7 und Singular, dass $V(J) \cap \mathbb{R}^9$ aufgefasst als Teilmenge von $\mathbb{R}^{3\times 3}$ die spezielle orthogonale Gruppe SO_3 ist. Überlege Dir dazu zunächst, dass eine Variante von Satz 2.7.7 richtig ist, die es erlaubt, $gT - 1$ statt $g^9T - 1$ als „letzten Erzeuger" des dortigen Ideals zu nehmen für $g := X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2$.

(c) Schreibe ein Singular-Skript, welches einfache Gleichungen dafür berechnet, wann für $x, s \in S := V(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 - 1) \cap \mathbb{R}^4$ gilt $\varphi(x) = \varphi(s)$. Vereinfache dann die erhaltenen Bedingungen von Hand so, dass du ein einfaches Ergebnis siehst. Ist $\varphi|_S$ injektiv? Wie viele Urbilder hat ein Bildpunkt?

Aufgabe 2. Franz und Sepp haben im ganzen Stress ihren Schäferhund unbeaufsichtigt gelassen, während sie auf der betrieblichen Weihnachtsfeier waren. Dadurch konnte dieser an Tag 3 den von Franz und Sepp mühsam erarbeiteten Plan auffressen. Es wissen Franz und Sepp nun nicht mehr, welche Aufgaben noch zu erledigen sind. Da beide an Tag 4 mit einem starken Kater aufgewacht sind, wissen sie auch nicht mehr, welche Aufgaben schon erledigt sind. Offenbar steht der Christbaum bereits und Franz ist gerade über die Verpackung der Christbaumkugeln gestolpert, aber da beide noch sehr lichtempfindlich sind, erkennen sie nicht, ob der Baum schon geschmückt ist. In der Küche hingegen blutet der abgeschlagene Kopf der Weihnachtsgans. Ob sie schon gebacken ist, ist ungewiss.

(a) Franzens und Sepps Schwester Zenz kommt als einzige mit noch klarem Kopf auf eine Idee, wie man die Sache systematisch angehen kann. Sie betrachtet das Ideal $I \subseteq K[\{X_{is} \mid i \in \{1, \ldots, 10\}, s \in \{1, \ldots, 5\}\}]$ mit $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{F}_2\}$, welches wir in der Übung zur Modellierung des Scheduling-Problems eingeführt hatten. Dieses erweitert sie mittels der gegebenen Zusatzinformationen zu einem Oberideal J, derart, dass $V(J)$ aus allen Lösungen besteht, die mit den Zusatzinformationen konsistent sind. Sie behauptet, dass eine eindeutige Rekonstruktion der Menge der von Tag 4 an noch zu erledigenden Aufgaben möglich ist, wenn $J = (P) + (F)$, wobei $P := J \cap K[X_{is} \mid s \leq 3]$ das Ideal der Bedingungen ist, die Vergangenheitsfranz und Vergangenheitssepp betreffen und $F := J \cap K[X_{is} \mid s \geq 4]$ jenes derer, die Zukunftsfranz und Zukunftssepp betreffen. Ist dies wirklich eine hinreichende Bedingung?

(b) Schreibe ein Singular-Skript, welches die Bedingung aus (a) überprüft. Halte deinen Code so allgemein, dass er für beliebige Ideale J funktioniert. Der Filmriss finde allerdings immer von Tag 3 auf Tag 4 statt.

(c) Ist es möglich, eindeutig zu rekonstruieren, welche Aufgaben an den Tagen 1 bis 3 erledigt wurden (und demnach, welche noch zu erledigen sind)? Falls nein, gib zwei zulässige Lösungen an, die der Eindeutigkeit widersprechen. Falls ja, welche Aufgaben sind noch zu erledigen?

Hinweis: Diese Codeschnipsel können helfen, um die Monome richtig zu ordnen:

```
ring A = 2,(x(1..10)(1..3),x(1..10)(4..5)),lp;
ring B = 2,(x(1..10)(4..5),x(1..10)(1..3)),lp;
map f = A, x(1..10)(1..3), x(1..10)(4..5);
```

Abgabe bis Freitag, den 10. Januar 2019, 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411. Die Singular-Codes müssen zusätzlich per Email bis Freitag, den 10. Januar 2019, 23:59 Uhr an `alexander.taveira-blomenhofer@uni.kn` **geschickt werden.**