Universität Konstanz Alexander Taveira Blomenhofer
Fachbereich Mathematik und Statistik Markus Schweighofer
Sommersemester 2019

Übungsblatt 2 zur Polynomialen Optimierung

Aufgabe 1 (5 Punkte). Sei R ein kommutativer Ring und $A \in R^{t \times t}$. Zeige

$$\det(A + TI_t) = \sum_{i=0}^{t} \left(\sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,t\} \\ \#I = t-i}} \det(A_I) \right) T^i.$$

Aufgabe 2 (7 Punkte).

(a) Zeichne mit YALMIP (Kommando `plot`[1]) oder mit der Hand

$$\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & x & 0 & x \\ x & 1 & y & 0 \\ 0 & y & 1 & z \\ x & 0 & z & 1 \end{pmatrix} \succeq 0 \right\}.$$

Welchem Gegenstand aus dem alltäglichem Leben ähnelt dieser Spektraeder?

(b) Versuche durch Ausprobieren, eine lineare Matrixungleichung zu finden, deren Lösungsmenge zumindest sehr grob einem Gömböc[2] ähnelt und kommentiere informell Dein Vorgehen und Deine Gedanken! Die beste Lösung wird prämiert. Es zählt sowohl die geometrische Ähnlichkeit als auch die algebraische Einfachheit. Die Jury besteht aus zwei fachkundigen Personen.

Aufgabe 3 (10 Punkte). Seien $k, t \in \mathbb{N}_0$ und R eine Relation auf $\{1, \ldots, k\}$ (also eine Teilmenge von $\{1, \ldots, k\}^2$). Als *Beispielszenario* bezeichnen wir im folgenden den Spezialfall $k = 6$ und $R = \{1,2,3\} \times \{4,5,6\}$.

(a) Franz und Sepp sind eineiige Zwillingsbrüder. Franz ist der Erstgeborene und Sepp der Zweitgeborene. Die beiden haben von ihrem Chef eine Liste mit k Aufgaben erhalten, die sie innerhalb von t Tagen erledigen sollen. Franz und Sepp haben genau dieselbe Ausbildung und dieselben Fertigkeiten. Die Erledigung einer jeden Aufgabe braucht für Franz und damit auch für Sepp jeweils genau einen Tag.

Die Erledigung einer Aufgabe kann nicht auf mehrere Tage verteilt werden. Dementsprechend kann keiner der beiden Brüder an mehr als einer Aufgabe am Tag arbeiten.

[1] `https://yalmip.github.io/command/hull/`
[2] `https://de.wikipedia.org/wiki/G%F6mb%F6c`

Weiter sind bei Reihenfolge der Bearbeitung Bedingungen einzuhalten, da manche der Aufgaben voneinander abhängen. Diese Abhängigkeit wird durch die Relation R beschrieben, wobei $(i,j) \in R$ bedeutet, dass Aufgabe i fertiggestellt sein muss, bevor Aufgabe j bearbeitet werden kann.

Der Fall, dass der Chef die beiden Zwillingsbrüder vor unmögliche Aufgaben stellt ist zugelassen (etwa wenn $\{(1,3),(3,1)\} \subseteq R$ oder $(3,3) \in R$). In diesem Fall sollten Franz und Sepp den Chef überzeugen, dass das Problem nicht lösbar ist.

Es handelt sich bei diesem Problem um ein Scheduling-Problem, Parallelisierungsproblem oder auch Ablaufplanungsproblem.

Für welche t besitzt das Problem im Beispielszenario eine Lösung?

(b) Seien $k,t \in \mathbb{N}_0$ und sei R eine Relation auf $\{1,\dots,k\}$. Betrachte die Menge $S_{k,t,R}$ aller Matrizen $x = (x_{ij})_{\substack{1\leq i\leq k\\1\leq j\leq t}} \in \{0,1\}^{k\times t}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) Alle Spaltensummen der Matrix x sind gleich 1.

(2) Alle Zeilensummen der Matrix x sind kleiner oder gleich 2.

(3) $\forall (i,j) \in R : \forall s \in \{1,\dots,t\} : \sum_{u=1}^{s-1} x_{iu} \geq \sum_{u=1}^{s} x_{ju}$

Beschreibe und begründe detailliert den Zusammenhang dieser Menge mit dem Problem aus (a).

(c) Formuliere ein möglichst einfaches POP wie in der Vorlesung, dessen zulässige Menge gleich $S_{k,t,R}$ ist.

(d) Definiere $S^{\mathrm{LP}}_{k,t,R}$ genauso wie $S_{k,t,R}$ mit dem einzigen Unterschied, dass hier im Unterschied zu (b) das Intervall $[0,\infty)$ anstelle der zweielementigen Menge $\{0,1\}$ verwendet wird. Interpretiere $S^{\mathrm{LP}}_{k,t,R}$ als Lösungsmenge eines neuen Problems, welches mit dem in (a) beschriebenen Problem eng verwandt ist.

Für welche t besitzt dieses zu (a) verwandte Problem im Beispielszenario eine Lösung?

(e) Formuliere ein möglichst einfaches LP, dessen zulässige Menge gleich $S^{\mathrm{LP}}_{k,t,R}$ ist.

(f) Schreibe eine MATLAB-Funktion `function G = franzseppLP(k,t,R)...`, die bei Eingabe von $k,t \in \mathbb{N}_0$ und einer Relation auf $\{1,\dots,k\}$ (etwa in Gestalt einer Matrix aus $\{0,1\}^{k\times k}$) eine YALMIP-Constraint-Structure generiert, in der geeignete Nebenbedingungen eines LPs möglichst elegant zusammengefasst sind, dessen Menge der zulässigen Lösungen gerade $S^{\mathrm{LP}}_{k,t,R}$ ist. Löse das LP mit verschiedenen Zielfunktionen im Beispielszenario für kleine t und berichte über Deine Beobachtungen. Die Variablen `X = sdpvar(...)` kannst du innerhalb der Funktion erstellen. Du gewinnst sie zurück, indem du `X = recover(depends(G))` aufrufst. Alternativ kannst du die Variablen auch als zweites Rückgabeargument der Funktion definieren.

(g) Warum zeigt das Beispielszenario, dass sich die beiden Scheduling-Probleme aus (a) und (d) sehr unterschiedlich verhalten?

Abgabe bis Freitag, den 10. Mai 2019, um 9:59 Uhr in die Zettelkästen neben F411.