
Übungsblatt 3 zur Polynomialen Optimierung

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Für jede Menge $A \subseteq V$ bezeichnen wir mit \overline{A} den Abschluss und $\overset{\circ}{A}$ das Innere von A . Sei $K \subseteq V$ ein Kegel. Zeige, dass dann auch \overline{K} und $\overset{\circ}{K} \cup \{0\}$ Kegel sind.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Welche der folgenden Kegel besitzt eine Einheit? Begründe Deine Aussage!

- (a) der Kegel der positiv semidefiniten Matrizen im Vektorraum aller symmetrischen $t \times t$ -Matrizen,
- (b) der Kegel der auf dem Intervall $[0, 1]$ nichtnegativen Polynome im Vektorraum aller reellen univariaten Polynome,
- (c) der Kegel der auf dem Intervall $[0, 1]$ nichtnegativen Polynome im Vektorraum aller reellen univariaten Polynome, die im Nullpunkt verschwinden,
- (d) der Kegel der auf dem Intervall $[-1, 1]$ nichtnegativen Polynome im Vektorraum aller reellen univariaten Polynome, die im Nullpunkt verschwinden,
- (e) der Kegel der gliedweise nichtnegativen Nullfolgen im Vektorraum aller reellen Nullfolgen.

Aufgabe 3 (10 Punkte). Dies ist eine Fortsetzung von Aufgabe 3 auf Blatt 2. Wieder seien also $k, t \in \mathbb{N}_0$. Eine geeignete Interpretation ist wieder, dass man k Aufgaben innerhalb von t Tagen erledigen sollte. Wieder sei R eine Relation auf $\{1, \dots, k\}$, die man so interpretieren kann, dass Aufgabe j von Aufgabe i abhängt falls $(i, j) \in R$. Als *Beispielszenario* bezeichnen wir wieder den Spezialfall $k = 6$ und $R = \{1, 2, 3\} \times \{4, 5, 6\}$. Wir nennen die Elemente der Menge $S_{k,t,R}$ *Pläne* und die Elemente ihrer Obermenge $S_{k,t,R}^{\text{LP}}$ *gebrochene Pläne*.

Ein Plan besagt, an welchem Tag welche Aufgabe erledigt werden soll, wobei jede Aufgabe an genau einem Tag vollständig bearbeitet wird und an keinem Tag mehr als zwei Aufgaben (denn nur Franz und Sepp stehen für die Arbeiten zur Verfügung). Falls $(i, j) \in R$, so darf dabei Aufgabe j an einem bestimmten Tag nur dann bearbeitet werden, wenn Aufgabe i bereits zu einem früheren Tag bearbeitet wurde.

Wir werden sehen, dass die Aufstellung eines gebrochenen Plans als erster Schritt auf dem Weg zur Erstellung eines Plans dienen kann. Unmittelbar verwertbar wäre ein gebrochener Plan aber nur in bestimmten Fällen, etwa zur Bearbeitung von Gütern, die man beliebig dosieren kann, zum Beispiel wenn chemische Flüssigkeiten in mehreren Arbeitsschritten hergestellt werden. Bei so einem Plan kann die Bearbeitung einer

Aufgabe prinzipiell über die zur Verfügung stehenden Tage beliebig verteilt werden. Hängt jedoch j von i ab, so darf j am Ende eines Tages nur dann zu einem gewissen Anteil bearbeitet sein, wenn i spätestens am Vortag zu demselben Anteil bearbeitet war.

Für jedes $x \in S_{k,t,R}^{\text{LP}}$ und jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ definieren wir den *Fertigstellungstag* von Aufgabe i gemäß des gebrochenen Plans x durch

$$c_i(x) := \max\{s \in \{1, \dots, t\} \mid x_{is} > 0\}.$$

Ist $x \in S_{k,t,R}$ sogar ein Plan, so gilt offensichtlich

$$\{s \in \{1, \dots, t\} \mid x_{is} > 0\} = \{s \in \{1, \dots, t\} \mid x_{is} = 1\} = \{c_i(x)\}$$

und wir nennen $c_i(x)$ manchmal auch den *Bearbeitungstag* von Aufgabe i gemäß x .

(h) Franz und Sepp wollen nun einen Plan aufstellen. Da sie nicht in der Vorlesung „Polynomiale Optimierung“ von Doktor Schweighofer waren, wissen sie nicht, wie sie das bewerkstelligen sollen, da sie das POP aus Teilaufgabe (c) nicht lösen können. Daher lösen sie das LP aus Teilaufgabe (e) und erhalten zumindest einen gebrochenen Plan $x \in S_{k,t,R}^{\text{LP}}$. Da die Aufgaben von einer Natur sind, die es verbietet, dass man die Erledigung einer Aufgabe auf mehrere Tage verteilt, kann x nicht unmittelbar verwendet werden. Franz und Sepp überlegen sich das folgende: Sie priorisieren die Aufgaben entsprechend ihres Fertigstellungstags im gebrochenen Plan x , das heißt sie nummerieren die Aufgaben so um, dass gilt

$$c_1(x) \leq c_2(x) \leq \dots \leq c_k(x).$$

Mit dieser Nummerierung versuchen sie nun, einen Plan $y \in S_{k,t,R}$ zu erstellen. Da Franz und Sepp nicht gerne vorausplanen, überlegen sie jeweils erst am frühen Morgen des Tages $s \in \{1, \dots, t\}$, welche Aufgaben sie am jeweiligen Tag s bearbeiten. Sie betrachten dazu die Menge I aller Aufgaben,

- die noch nicht bearbeitet wurden und
- die nur abhängen von Aufgaben j , die bereits bearbeitet wurden.

Falls $I = \emptyset$, gehen sie im See schwimmen. Falls $I = \{i\}$ für ein $i \in \{1, \dots, k\}$, so bearbeitet Sepp alleine Aufgabe i und Franz geht auf die Mainau. Falls $\#I \geq 2$, so bearbeiten Franz und Sepp die beiden kleinsten Aufgaben aus I .

Ist am Feierabend von Tag t jede Aufgabe erledigt, so erhalten Franz und Sepp a posteriori offenbar einen Plan $y \in S_{k,t,R}$. Andernfalls bitten Franz und Sepp den Chef um mehr Zeit (also um eine Erhöhung von t), womit sie ihren Arbeitsplatz gefährden.

Spiele dieses Vorgehen anhand des Beispielszenarios für kleine Anzahlen t von verfügbaren Tagen durch!

- (i) Sei $y \in S_{k,t,R}$ ein Plan, den Franz und Sepp auf die in (h) beschriebene Weise gefunden haben. Bezeichne

$$I := \{i \in \{1, \dots, k\} \mid c_i(x) < c_i(y)\}$$

die Menge der Aufgaben die gemäß y später als gemäß x fertiggestellt werden. Wir setzen voraus, dass $I \neq \emptyset$, setzen dann

$$s := \min\{c_i(y) \mid i \in I\}$$

und wählen $m \in I$ mit $c_m(y) = s$. In anderen Worten: Es sei m eine Aufgabe, die gemäß des Plans y später erledigt wird als gemäß des gebrochenen Plans x und zwar unter diesen diejenige oder eine derjenigen, die im Plan y am frühesten fertiggestellt wird.

Zeige, dass es eine Aufgabe $\ell \in \{1, \dots, k\}$ gibt, die im Plan y früher als m aber nicht zeitgleich mit einer Aufgabe $< m$ bearbeitet wird (also entweder alleine bearbeitet wird oder zeitgleich mit einer Aufgabe $> m$).

Abgabe bis Freitag, den 24. Mai 2019, um 9:59 Uhr in die Zettelkästen neben F411.