Universität Konstanz Alexander Taveira Blomenhofer
Fachbereich Mathematik und Statistik Markus Schweighofer
Sommersemester 2019

Übungsblatt 5 zur Polynomialen Optimierung

Aufgabe 1 (8 Punkte). Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und $f, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$. Betrachte das polynomiale Optimierungsproblem

$$(P) \qquad \text{minimiere } f(x) \text{ über } x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } p_1(x) \geq 0, \dots, p_m(x) \geq 0$$

und die dazugehörige Momentenrelaxierung vom Grad k

$$(P_k) \qquad \text{minimiere } L(f) \text{ über } L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k^* \text{ mit } L(T_k(p_1, \dots, p_m)) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ und } L(1) = 1.$$

Bezeichne $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) \geq 0, \dots, p_m(x) \geq 0\}$ den zulässigen Bereich von (P).

(a) Zeige $P^* \geq P^*_\infty \geq \dots \geq P^*_{k+3} \geq P^*_{k+2} \geq P^*_{k+1} \geq P^*_k$

(b) Es besitze $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k^*$ eine Quadraturformel, deren Stützstellen alle in S liegen und deren Gewichte sich zu 1 aufsummieren. Zeige, dass dann L eine zulässige Lösung von (P_k) mit $L(f) \geq P^*$ ist.

(c) Es habe (P_k) eine optimale Lösung L^*, die eine Quadraturformel mit allen Stützstellen in S besitzt. Zeige, dass dann in (a) überall Gleichheit gilt.

(d) In der Situation von (c) habe zusätzlich (P) eine eindeutige optimale Lösung x^*. Zeige, dass dann $k \geq 1$, $x^* = (L(X_1), \dots, L(X_n))$ und allgemeiner $L^*(p) = p(x^*)$ für alle $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$ gilt.

Aufgabe 2 (12 Punkte). Diese Aufgabe setzt Aufgabe 3 auf dem zweiten und dritten Übungsblatt, Aufgabe 2 auf dem vierten Übungsblatt sowie das zweite Programmierprojekt fort. Wieder seien also $k, t \in \mathbb{N}_0$ und R eine Relation auf $\{1, \dots, k\}$ mit den bekannten Interpretationen. In Aufgabe 3(h) des dritten Blattes haben wir gelernt, wie Franz und Sepp *versuchen*, aus einem gebrochenen Plan $x \in S^{\mathrm{LP}}_{k,t,R}$ einen Plan $y \in S_{k,t,R}$ zu gewinnen. In Teil (a) des zweiten Programmierprojekts wurde der Algorithmus von Franz und Sepp sogar durch die MATLAB-Funktion `list_schedule` implementiert. Dabei konnte es allerdings vorkommen, dass die Zeit t nicht ausreicht und daher Franz und Sepp ihren Arbeitsplatz gefährden. Wir werden nun zeigen, dass Franz und Sepp immer einen Plan $y \in S_{k,t,R}$ erhalten (dass also die vorgegebene Zeit ausreicht), wenn sie mit einem Sherali-Adams-Plan starten (das heißt $x \in S^{\mathrm{SA}}_{k,t,R} \subseteq S^{\mathrm{LP}}_{k,t,R}$).

Sei dazu $x \in S^{\mathrm{SA}}_{k,t,R}$ fixiert. Indem man zum Beweis notfalls künstlich die Zeit t erhöht, kann man offensichtlich davon ausgehen, dass die Zeit ausreicht, wenn man im Gegenzug zeigt, dass für den Plan

$$y := \texttt{list\_schedule}((c_i(x))_{1 \leq i \leq k}, t, R) \in S_{k,t,R}$$

gilt

$$\max_{i=1,\ldots,k} c_i(y) \leq \max_{i=1,\ldots,k} c_i(x).$$

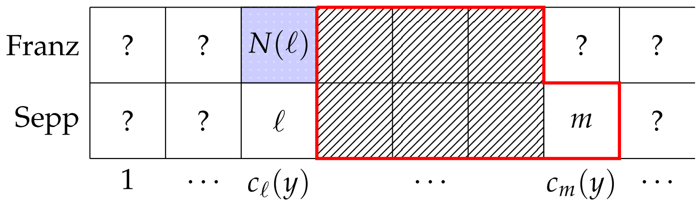
Wir zeigen sogar

$$\forall i \in \{1,\ldots,k\} : c_i(y) \leq c_i(x).$$

Nach einer allfälligen Umnummerierung der Aufgaben $1,\ldots,k$ gehen wir wieder davon aus, dass

$$c_1(x) \leq \ldots \leq c_k(x)$$

gilt. Mit dem Ziel, einen Widerspruch zu erhalten, nehmen wir an, dass es eine Aufgabe $m \in \{1,\ldots,k\}$ gibt mit $c_m(x) < c_m(y)$ und wählen m unter all diesen mit minimalem Wert von $c_m(y)$. Nach Aufgabe 3(i) auf Blatt 3 gibt es eine Aufgabe $\ell \in \{1,\ldots,k\}$, die im Plan y früher als m, aber nicht zeitgleich mit einer Aufgabe $< m$ bearbeitet wird (also entweder alleine bearbeitet wird oder zeitgleich mit einer Aufgabe $> m$). Wir wählen ℓ unter all diesen so, dass $c_\ell(y)$ maximal ist. Dies wird veranschaulicht durch eine Zeichnung wie folgt:



In so einer Zeichnung würde man in der ersten Zeile die Nummern der Aufgaben eintragen, die Franz im Plan y bearbeiten muss, und in der zweiten Zeile die Aufgaben, die Sepp im Plan y abarbeiten muss. In der s-ten Spalte stünden die Nummern der Aufgaben, die am s-ten Tag bearbeitet werden. Die Information, ob Franz oder Sepp eine Aufgabe bearbeiten, ist im Plan y nicht festgelegt, aber wie in Aufgabe 3(h) auf Blatt 2 beschrieben, geht Franz an Tagen, an denen nur eine Aufgabe zu bearbeiten ist, immer auf die Mainau. In der obigen Zeichnung bedeutet ein Fragezeichen, dass dort die Nummer einer Aufgabe stehen könnte oder dass das Feld dort auch leer sein könnte. Das mit $N(\ell)$ beschriftete blaue Feld steht für ein Feld, was entweder leer ist oder mit einer Aufgabe $N(\ell)$ („Nachbar von ℓ") gefüllt ist. Zeige nun:

(a) Der schraffierte Bereich ist komplett gefüllt mit Aufgaben, die alle $< m$ sind.

(b) Eine Aufgabe $i \in \{1,\ldots,k\}$ heiße *indirekt abhängig* von $j \in \{1,\ldots,k\}$, wenn es $N \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und eine Folge $i_1,\ldots,i_N$ gibt mit $i_1 = i$, $i_N = j$ und $(i_{n+1}, i_n) \in R$ für alle $n \in \{1,\ldots,N-1\}$.

Zeige: Alle Aufgaben im „roten" (das heißt rot umrahmten) Bereich hängen direkt oder indirekt von Aufgabe ℓ oder, falls existent, von ihrer Nachbaraufgabe $N(\ell)$ ab.

Hinweis: Wähle $i_1 := i$ aus dem roten Bereich. Es liegt i liegt nicht auf dem blauen Feld, obwohl $i < N(\ell)$. Zeige, dass es daher eine Aufgabe i_2 mit

$$c_\ell(y) \leq c_{i_2}(y) < c_i(y),$$

von der i_1 abhängt. Ist $c_\ell(y) = c_{i_2}(y)$, so sind wir fertig. Andernfalls liegt i_2 ebenfalls im roten Bereich...

(c) Zeige, dass die Aufgaben im roten Bereich weder direkt noch indirekt von $N(\ell)$ abhängen (falls letztere existiert).

(d) Folgere, dass der rote Bereich komplett gefüllt ist mit Aufgaben $\leq m$, die alle direkt oder indirekt von ℓ abhängig sind.

(e) Zeige, dass es einen gebrochenen Plan $z \in S^{\mathrm{LP}}_{k,t,R}$ gibt mit

- $z_{\ell\, c_\ell(x)} = 1$ und
- $z_{is} = 0$ für alle Aufgaben i im roten Bereich und alle $s > c_m(x)$.

Hinweis: Benutze Aufgabe 2 auf Blatt 4.

(f) Zeige $z_{is} = 0$ für alle Aufgaben i im roten Bereich und alle $s \leq c_\ell(x)$.

Hinweis: Benutze (d).

(g) Zeige $c_\ell(y) \leq c_\ell(x) < c_m(x) < c_m(y)$.

(h) Folgere, dass gemäß dem gebrochenen Plan z die Aufgaben im roten Bereich innerhalb des Zeitraums bearbeitet werden, über den sich der schraffierte Bereich erstreckt. Warum ist das ein Widerspruch?

Abgabe bis Freitag, den 21. Juni 2019, um 9:59 Uhr in die Zettelkästen neben F411.