Universität Konstanz Alexander Taveira Blomenhofer
Fachbereich Mathematik und Statistik Markus Schweighofer
Sommersemester 2019

Übungsblatt 6 zur Polynomialen Optimierung

Aufgabe 1 (24 Punkte). Diese Aufgabe setzt Aufgabe 3 auf dem zweiten und dritten Übungsblatt, Aufgabe 2 auf dem vierten und fünften Übungsblatt sowie das zweite und dritte Programmierprojekt fort.

Wieder seien also $k, t \in \mathbb{N}_0$ und R eine Relation auf $\{1, \ldots, k\}$ mit den bekannten Interpretationen. In Aufgabe 3 des fünften Blattes haben wir gelernt, dass Franz und Sepp aus einem gebrochenen Sherali-Adams-Plan $x \in S^{\mathrm{SA}}_{k,t,R}$ für zwei Arbeiter stets einen Plan $y \in S_{k,t,R}$ für zwei Arbeiter gewinnen können. Nun ist allerdings in Projekt 3 Zenz zu Franz und Sepp als neue Arbeiterin hinzugestoßen. Franz, Sepp und Zenz haben Deine Abgabe zu Blatt 5 gelesen und mochten Deinen Beweis. Sie denken sich, dass es keinen so großen Unterschied machen wird, ob man für zwei oder drei Leute plant. Daher haben sie Deinen Beweis an drei Personen angepasst (zu diesem Zweck haben sie alle Notationen in der offensichtlichen Weise von zwei auf drei Arbeiter angepasst) und bitten Dich, einmal sorgfältig darüberzuschauen. Wo liegt der Fehler?

„Beweis". Sei x ein Sherali-Adams-Plan der zweiten Generation für drei Arbeiter gemäß Aufgabe (c) von Plan 2. Indem man zum Beweis notfalls künstlich die Zeit t erhöht, kann man offensichtlich davon ausgehen, dass die Zeit ausreicht, wenn man im Gegenzug zeigt, dass für den Plan (für drei Arbeiter)

$$y := \texttt{list\_schedule}((c_i(x))_{1 \leq i \leq k}, t, R) \in S_{k,t,R}$$

gilt

$$\max_{i=1,\ldots,k} c_i(y) \leq \max_{i=1,\ldots,k} c_i(x).$$

Wir zeigen sogar

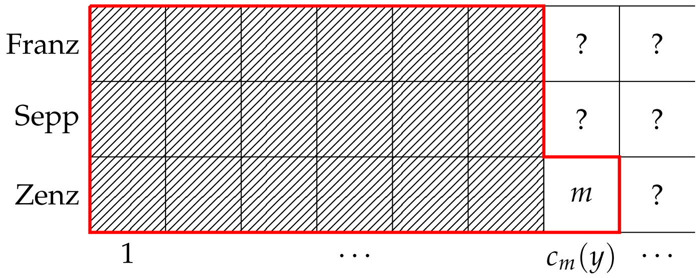
$$\forall i \in \{1, \ldots, k\} : c_i(y) \leq c_i(x).$$

Nach einer allfälligen Umnummerierung der Aufgaben $1, \ldots, k$ gehen wir wieder davon aus, dass

$$c_1(x) \leq \ldots \leq c_k(x)$$

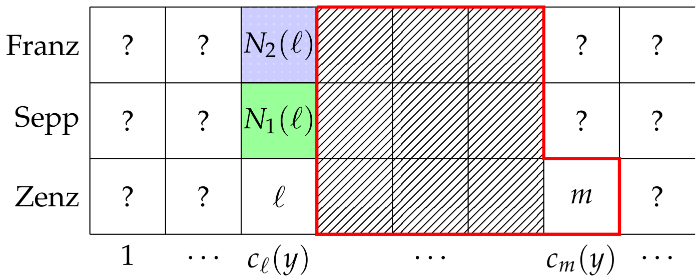
gilt. Mit dem Ziel, einen Widerspruch zu erhalten, nehmen wir an, dass es eine Aufgabe $m \in \{1, \ldots, k\}$ gibt mit $c_m(x) < c_m(y)$ und wählen m unter all diesen mit minimalem Wert von $c_m(y)$. Indem wir analog wie in Aufgabe 3(i) auf Blatt 3 argumentieren, sehen wir: Es gibt eine Aufgabe $\ell \in \{1, \ldots, k\}$, die im Plan y früher als m, aber nicht zeitgleich mit *zwei* Aufgaben $< m$ bearbeitet wird (also entweder alleine bearbeitet wird oder zeitgleich mit nur einer beliebigen Aufgabe oder zeitgleich mit zwei Aufgaben, von denen mindestens eine $> m$ ist).

Begründung: Würden alle Aufgaben, die im Plan y früher als m bearbeitet werden, immer zeitgleich mit zwei Aufgaben $< m$ bearbeitet, so wäre der gesamte schraffierte Bereich in der folgenden Zeichnung gefüllt mit Aufgaben $< m$:



Im gebrochenen Plan x werden dann aber alle Aufgaben im rot umrandeten Bereich bis zum Zeitpunkt $c_m(x) \leq c_m(y) - 1$ fertig, also innerhalb des Zeitraums, über den sich der schraffierte Bereich erstreckt. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass der gebrochene Plan ein Element von $S^{\mathrm{LP}}_{k,t,R}$ ist, denn der rote Bereich ist strikt größer als der schraffierte.

Wir wählen ℓ nun also unter all diesen so, dass $c_\ell(y)$ maximal ist. Dies wird veranschaulicht durch eine Zeichnung wie folgt:



In der obigen Zeichnung bedeutet ein Fragezeichen, dass dort die Nummer einer Aufgabe stehen könnte oder dass das Feld dort auch leer sein könnte. Das mit $N_i(\ell)$ beschriftete blaue oder grüne Feld ($i \in \{1, 2\}$) steht für ein Feld, was entweder leer ist oder mit einer Aufgabe $N_i(\ell)$ („i-ter Nachbar von ℓ“) gefüllt ist. Wir können natürlich Œ annehmen, dass das grüne Feld nur dann leer ist, wenn auch das blaue leer ist, und dass, wenn beide gefüllt sind mit Aufgaben $N_1(\ell), N_2(\ell) \in \{1, \ldots, k\}$, Œ $N_2(\ell) > m$.

Nun sehen wir:

(a) Der schraffierte Bereich ist komplett gefüllt mit Aufgaben, die alle $< m$ sind, denn gerade so war ℓ gewählt.

(b) Jede Aufgabe $i \in \{1, \ldots, k\}$ im „roten“ (das heißt rot umrahmten) Bereich hängt direkt oder indirekt von Aufgabe ℓ oder, falls existent, von einer ihrer Nachbaraufgaben $N_i(\ell)$ ab, denn: Wähle $i_1 := i$ aus dem roten Bereich. Es liegt i liegt nicht auf dem blauen Feld, obwohl $i < N_2(\ell)$ falls $N_2(\ell)$ existiert. Daher war i noch von einer anderen Aufgabe i_2 abhängig, die zum Zeitpunkt, zu dem der List-Schedule-Algorithmus sich anschickte, das blaue Feld zu füllen, noch nicht fertiggestellt war. Es gilt also $c_\ell(y) \leq c_{i_2}(y)$. Da i von i_2 abhängig ist, ist $c_{i_2}(y) < c_i(y)$. Ist nun $c_\ell(y) = c_{i_2}(y)$, so sind wir fertig. Andernfalls liegt i_2 ebenfalls im roten Bereich und wir fahren iterativ fort.

(c) Jede Aufgabe $i \in \{1, \ldots, k\}$ im roten Bereich hängt direkt oder indirekt von Aufgabe ℓ oder, falls existent, von der Nachbaraufgabe $N_1(\ell)$ ab, denn: Zu zeigen ist nur, dass die Aufgaben im roten Bereich weder direkt noch indirekt von $N_2(\ell)$ abhängen, was klar ist, da $c_{N_2(\ell)}(x) \geq c_m(x)$, also Aufgaben $< m$ nicht von $N_2(\ell)$ abhängen (da sonst x kein gebrochener Plan wäre).

(d) Wir folgern, dass der rote Bereich komplett gefüllt ist mit Aufgaben $\leq m$, die alle direkt oder indirekt von ℓ oder $N_1(\ell)$ abhängig sind.

(e) Durch höchstens zweimaliges Anwenden von Aufgabe 2(c) auf Blatt 4, erst mit $X_{\ell\, c_\ell(x)}$ und dann gegebenenfalls (falls $N_1(\ell)$ existiert) mit $X_{N_1(\ell)\, c_{N_1(\ell)}(x)}$, sehen wir nun, dass es einen gebrochenen Plan $z \in S^{\mathrm{LP}}_{k,t,R}$ gibt mit

- $z_{\ell\, c_\ell(x)} = 1$ und
- $z_{N_1(\ell)\, c_{N_1(\ell)}(x)} = 1$ und
- $z_{is} = 0$ für alle Aufgaben i im roten Bereich und alle $s > c_m(x)$.

(f) Wir sehen wieder $z_{is} = 0$ für alle Aufgaben i im roten Bereich und alle $s \leq \min\{c_\ell(x), c_{N_1(\ell)}(x)\}$. Dieses Minimum ist hier und im folgenden als $c_\ell(x)$ zu interpretieren, falls $N_1(\ell)$ nicht existiert.

(g) Also $c_{N_1(\ell)}(y) = c_\ell(y) \leq \min\{c_\ell(x), c_{N_1(\ell)}(x)\} < c_m(x) < c_m(y)$: Die erste Ungleichung gilt wegen der Minimalitätsbedingung bei der Wahl von m, die zweite, da m von ℓ oder $N_1(\ell)$ abhängig ist und die dritte nach Wahl von m.

(h) Nach (g) werden daher gemäß dem gebrochenen Plan z die Aufgaben im roten Bereich innerhalb des Zeitraums bearbeitet, über den sich der schraffierte Bereich erstreckt, denn sie müssen gemäß dem dritten Punkt in (e) bis $c_m(x)$ fertiggestellt sein, können aber nach (f) erst ab $c_\ell(y) + 1$ bearbeitet werden.

$\square$

Abgabe bis Freitag, den 5. Juli 2019, um 9:59 Uhr in die Zettelkästen neben F411.