
Übungsblatt 2 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1. Welcher der folgenden Moduln hat die Eigenschaft, dass alle seine Untermoduln frei sind?

- (a) Der Polynomring $\mathbb{R}[X]$ als Modul über sich selbst.
- (b) Der Polynomring $\mathbb{R}[X, Y]$ als Modul über sich selbst.
- (c) Der Ring $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ als Modul über sich selbst.
- (d) Der Ring $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ der reellen 2×2 -Matrizen als Modul über sich selbst.

Aufgabe 2. Sei A ein Ring und $0 \neq L \neq A$ ein Untermodul des A -Moduls A .

- (a) Zeige unter der Voraussetzung, dass kein Untermodul des A -Moduls A echt zwischen L und A liegt, dass der A -Modul A/L nicht frei ist.
- (b) Zeige, dass (a) auch ohne die genannte Voraussetzung gilt, wenn der Ring A kommutativ ist.
- (c) Finde ein Beispiel für A und L , für das (a) ohne die genannte Voraussetzung nicht gilt.

Aufgabe 3. Sei A ein Ring. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

- (a) Jeder A -Modul ist frei.
- (b) Jeder Quotient des A -Moduls A ist frei.
- (c) In A besitzt jedes von 0 verschiedene Element ein Linksinverses, das heißt

$$\forall a \in A \setminus \{0\} : \exists b \in A : ba = 1.$$

- (d) In A besitzt jedes von 0 verschiedene Element ein Rechtsinverses, das heißt

$$\forall a \in A \setminus \{0\} : \exists b \in A : ab = 1.$$

Abgabe bis Donnerstag, den 2. Mai 2019, um 12:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.