

Übungsblatt 3 zur Zahlentheorie

**Aufgabe 1.** Sei  $R$  ein Ring. Ein (endliches oder unendliches) Diagramm von  $R$ -Modulhomomorphismen

$$\cdots \cdots M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \cdots \cdots$$

nennt man eine *Sequenz*. Man nennt diese Sequenz *exakt*, wenn  $\ker(f_i) = \operatorname{im}(f_{i-1})$  für alle  $i$  gilt (für die  $M_i$  weder am Anfang noch am Ende des Diagramms steht). Sei eine weitere Sequenz derselben Gestalt

$$\cdots \cdots N_{i-1} \xrightarrow{g_{i-1}} N_i \xrightarrow{g_i} N_{i+1} \cdots \cdots$$

gegeben. Eine Familie von Modulisomorphismen  $h_i: M_i \rightarrow N_i$  heißt ein *Isomorphismus* der beiden Sequenzen, wenn das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \cdots & M_{i-1} & \xrightarrow{f_{i-1}} & M_i & \xrightarrow{f_i} & M_{i+1} & \cdots \cdots \\ & \downarrow h_{i-1} & & \downarrow h_i & & \downarrow h_{i+1} & \\ \cdots \cdots & N_{i-1} & \xrightarrow{g_{i-1}} & N_i & \xrightarrow{g_i} & N_{i+1} & \cdots \cdots \end{array}$$

kommutiert. Eine *kurze Sequenz* ist eine Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0,$$

wobei  $0$  für den  $R$ -Nullmodul stehe. Zeige:

- (a) Eine solche kurze Sequenz ist genau dann exakt, wenn  $f$  injektiv ist,  $g$  surjektiv ist und  $\operatorname{im} f = \ker g$  gilt.
- (b) Ist eine solche kurze Sequenz exakt, so ist  $M/\operatorname{im} f \cong N$ .
- (c) Zeige, dass die kurze Sequenz

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow L \times N \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

für alle  $R$ -Moduln  $L$  und  $N$  exakt ist, wobei ein unbeschrifteter Pfeil hier und im folgenden jeweils für den jeweiligen kanonischen Homomorphismus stehe.

(d) Es sei das Diagramm von  $R$ -Modulhomomorphismen

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & L \times N & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow h & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0
 \end{array} \tag{1}$$

gegeben. Bezeichne mit  $h_1$  und  $h_2$  die eindeutig bestimmten Homomorphismen, für die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 L & & N \\
 \searrow & & \swarrow \\
 & L \times N & \\
 \swarrow & \downarrow h & \searrow \\
 h_1 & & h_2 \\
 & M &
 \end{array}$$

kommutiert. Zeige, dass  $(0, \text{id}_L, h, \text{id}_N, 0)$  genau dann ein Isomorphismus der beiden Zeilen des ersten Diagramms (1) ist (das heißt  $h$  ist ein Isomorphismus, der das Diagramm zum kommutieren bringt), wenn die zweite Zeile des Diagramms (1) exakt ist und sowohl  $h_1 = f$  als auch  $g \circ h_2 = \text{id}_N$  gelten.

(e) Es sei das Diagramm von Homomorphismen

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow h & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & L \times N & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0
 \end{array} \tag{2}$$

gegeben. Bezeichne mit  $h_1$  und  $h_2$  die eindeutig bestimmten Homomorphismen, für die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 & M & \\
 h_1 \swarrow & \downarrow h & \searrow h_2 \\
 & L \times N & \\
 \downarrow & \swarrow & \searrow \\
 L & & N
 \end{array}$$

kommutiert. Zeige, dass  $(0, \text{id}_L, h, \text{id}_N, 0)$  genau dann ein Isomorphismus der beiden Zeilen des Diagramms (2) ist, wenn die erste Zeile des Diagramms (2) exakt ist und sowohl  $h_1 \circ f = \text{id}_L$  als auch  $h_2 = g$  gelten.

(f) Es sei eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0,$$

gegeben. Zeige, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

- (i) Es existiert ein  $R$ -Modulhomomorphismus  $f': M \rightarrow L$  mit  $f' \circ f = \text{id}_L$ .
- (ii) Es existiert ein  $R$ -Modulhomomorphismus  $g': N \rightarrow M$  mit  $g \circ g' = \text{id}_N$ .
- (iii) Die gegebene Sequenz ist isomorph zur Sequenz

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow L \times N \longrightarrow N \longrightarrow 0 .$$

Unter diesen Bedingungen sagt man, dass die kurze exakte Sequenz *zerfällt*.

**Aufgabe 2.** Sei  $N$  ein Untermodul des Moduls  $M$ . Zeige: Ist  $M/N$  frei, so ist  $N$  ein direkter Summand von  $M$ , das heißt es gibt einen Untermodul  $P$  von  $M$  mit

$$M = N \oplus P.$$

**Abgabe** bis Mittwoch, den 8. Mai 2019, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.