Universität Konstanz Alexander Taveira Blomenhofer
Fachbereich Mathematik und Statistik Markus Schweighofer
Sommersemester 2019

Übungsblatt 4 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1. Sei M ein zyklischer halbeinfacher Modul. Zeige:

(a) Jeder Untermodul von M ist wieder zyklisch und halbeinfach.

(b) M ist eine direkte Summe endlich vieler einfacher Untermoduln.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeige:

(a) K^n ist als $K^{n\times n}$-Modul einfach.

(b) $K^{n\times n}$ ist als $K^{n\times n}$-Modul zyklisch und halbeinfach.

(c) Jeder Untermodul des $K^{n\times n}$-Moduls $K^{n\times n}$ ist von der Form

$$\{A \in K^{n\times n} \mid U \subseteq \ker A\}$$

für einen Unterraum U des K-Vektorraums K^n.

(d) Jeder einfache $K^{n\times n}$-Modul N ist zum $K^{n\times n}$-Modul K^n isomorph.

Aufgabe 3. Sei R ein kommutativer Ring. Zeige, dass R als R-Modul genau dann

(a) einfach ist, wenn R ein Körper ist.

(b) halbeinfach ist, wenn R als Ring isomorph zu einem endlichen direkten Produkt von Körpern ist.

Aufgabe 4. Betrachte $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Z}$ beide als $\mathbb{Z}$-Modul sowie für fixiertes $s \in \mathbb{Z}$ mit $s \geq 2$ den Untermodul

$$M := \left\{ \frac{a}{s^k} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

von $\mathbb{Q}$.

(a) Ist $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ noethersch?

(b) Ist $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ artinsch?

(c) Ist $M/\mathbb{Z}$ noethersch?

(d) Ist $M/\mathbb{Z}$ artinsch?

Abgabe bis Mittwoch, den 15. Mai 2019, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.