Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2019

Alexander Taveira Blomenhofer
Markus Schweighofer

Übungsblatt 6 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1. Für alle Ringe R, alle R-Moduln M, alle $m, m, r \in \mathbb{N}_0$, $A \in R^{m\times n}$ und $X \in M^{n\times r}$ setzen wir

$$AX := \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}X_{jk}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le k\le r}}.$$

Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Zeige für alle $m, n, r, s \in \mathbb{N}_0$:

(a) $\forall A, B \in R^{m\times n} : \forall X \in M^{n\times r} : (A+B)X = AX + BX$

(b) $\forall A \in R^{m\times n} : \forall X, Y \in M^{n\times r} : A(X+Y) = AX + AY$

(c) $\forall A \in R^{m\times n} : \forall B \in R^{n\times r} : \forall X \in R^{r\times s} : A(BX) = (AB)X$

(d) $R^{n\times n}$ wird mit der wie oben (im Spezialfall $M = R$ und $m = n = r$) erklärten Multiplikation ein Ring mit $1 = I_n$.

(e) $M^{n\times r}$ wird mit der wie oben (im Spezialfall $m = n$) erklärten Skalarmultiplikation ein $R^{n\times n}$-Modul.

Aufgabe 2. Sei R ein Ring. Zeige, dass R genau dann kommutativ ist, wenn für alle R-Moduln M und N die Menge

$$\mathrm{Hom}(M, N) = \{f \mid f\colon M \to N\}$$

einen Untermodul des R-Moduls N^M aller Abbildungen von M nach N bildet.

Aufgabe 3. Betrachte die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} X-1 & X^2-1 & 0 \\ X^3-X^2+X-1 & X^4+X^2-2 & X^2-1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}[X]^{2\times 3}.$$

(a) Berechne die Smithsche Normalform $S \in \mathbb{Q}[X]^{2\times 3}$ von A und finde $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}[X])$ derart, dass $Q \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}[X])$ existiert mit $S = PAQ$.

(b) Gebe für den Modul $\mathbb{Q}[X]$-Modul $M := \mathbb{Q}[X]^2/\operatorname{im} A$ explizit Isomorphien wie im ersten und zweiten Teil des Struktursatzes für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen zusammen mit dazugehörigen Isomorphismen an.

(c) Bestimme die Länge von M.

(d) Bestimme möglichst explizit eine Kompositionsreihe von M.

(e) Bestimme bis auf Isomorphie und Reihenfolge die Faktoren einer Kompositionsreihe von M wie im Satz von Jordan-Hölder.

(f) Schreibe M möglichst explizit als direkte Summe unzerlegbarer Untermoduln wie im Satz von Krull-Remak-Schmidt.

(g) Bestimme die Dimension von $\mathbb{Q}[X]^2 / \operatorname{im}(A)$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

Aufgabe 4. Sei R ein kommutativer Ring.

(a) Seien $A, B \in R^{m\times n}$, $P \in \mathrm{GL}_m(R)$ und $Q \in \mathrm{GL}_n(R)$ mit $B = PAQ$. Zeige, dass die Abbildung
$$R^m / \operatorname{im} A \to R^m / \operatorname{im} B,\ \overline{x} \mapsto \overline{Px} \quad (x \in R^m)$$
wohldefiniert und ein Modulisomorphismus ist.

(b) Sei R ein Hauptidealring und seien $A \in R^{m\times n}$ mit Elementarteilern $c_1(A) \mid \ldots \mid c_\ell(A)$ ($\ell := \min(m, n)$),
$$P = \begin{pmatrix} & * & \\ \hline b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{km} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_m(R),$$
$S \in R^{m\times n}$ in Smithscher Normalform und $Q \in \mathrm{GL}_n(R)$ mit
$$S = PAQ.$$
Dabei seien $j, k \in \mathbb{N}_0$ mit $j + k = m$, $j \leq \ell$ und $c_i(A) = 1$ für $i \in \{1, ..., j\}$. Zeige, dass
$$\begin{aligned} R^m / \operatorname{im} A &\to \prod_{i=j+1}^{\ell} R/c_i(A) \times \prod_{i=\ell+1}^{m} R/0R \\ \overline{x} &\mapsto (\overline{b_{11}x_1 + \cdots + b_{1m}x_m}, \quad \ldots \quad, \overline{b_{k1}x_1 + \cdots + b_{km}x_m}) \qquad (x \in R^m) \end{aligned}$$
ein wohldefinierter R-Modulisomorphismus ist.

Abgabe bis Mittwoch, den 29. Mai 2019, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.