Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2019

Alexander Taveira Blomenhofer
Markus Schweighofer

Übungsblatt 8 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1. Zeige:

(a) $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ ist nicht faktoriell.

(b) Der quadratische Zahlring $\mathscr{O}_{-3}$ ist euklidisch.

Aufgabe 2. Sei $p \in \mathbb{P}$ mit $p \equiv_{(3)} 1$. Zeige:

(a) Für $m := \frac{p-1}{3} \in \mathbb{N}$ ist jedes Element von $\{x^3 \mid x \in \mathbb{F}_p^\times\}$ eine Nullstelle des Polynoms $X^m - 1 \in \mathbb{F}_p[X]$.

(b) Es gibt $x, y \in \mathbb{F}_p^\times$ mit $x \neq y$ und $x^3 = y^3$.

(c) Das Polynom $X^3 - 1$ zerfällt in $\mathbb{F}_p[X]$ in Linearfaktoren.

(d) Das Polynom $X^3 - 1$ zerfällt in $\mathscr{O}_{-3}[X]$ in Linearfaktoren.

(e) p ist nicht prim im quadratischen Zahlring $\mathscr{O}_{-3}$.

(f) p ist im Ring $\mathscr{O}_{-3}$ reduzibel.

(g) Zeige, dass für jedes $z \in \mathscr{O}_{-3}$ gilt $\left\{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}z,\ z,\ \frac{1-\sqrt{-3}}{2}z\right\} \cap \mathbb{Z}[\sqrt{-3}] \neq \emptyset$.

(h) Es gibt $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $p = a^2 + 3b^2$.
Hinweis: Zeige $p = |z|^2$ für ein $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$. Nutze dazu (g) und $\left|\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right| = 1$.

Aufgabe 3. Zeige, dass der Oberring $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-5}}{2}\right]$ von $\mathscr{O}_{-5} = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ faktoriell ist, obwohl $\mathscr{O}_{-5}$ nicht faktoriell ist.

Abgabe bis Mittwoch, den 12. Juni 2019, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.