Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2019

Alexander Taveira Blomenhofer
Markus Schweighofer

Übungsblatt 9 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1. Sei A ein Integritätsring. Fasse für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von A die Lokalisierung $A_{\mathfrak{m}} = \left\{ \frac{a}{s} \mid a \in A, s \in A \setminus \mathfrak{m} \right\}$ als Unterring des Quotientenkörpers $\mathrm{qf}(A)$ von A auf. Zeige

$$A = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \text{ maximales} \\ \text{Ideal von } A}} A_{\mathfrak{m}}.$$

Aufgabe 2. Sei A ein kommutativer Ring und $S \subseteq A$ multiplikativ. Betrachte die Lokalisierung $S^{-1}A$ von A nach S. Zeige:

(a) Für jedes Ideal I von A ist $S^{-1}I = \left\{ \frac{a}{s} \mid a \in I, s \in S \right\}$ ein Ideal des Ringes $S^{-1}A$.

(b) Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von A mit $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ ist $S^{-1}\mathfrak{p}$ ein Primideal von $S^{-1}A$.

(c) Ist I ein Ideal von A und sind $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$ sowie $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n$ Primideale von A mit

$$I = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_m \mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_n,$$

wobei $\mathfrak{p}_i \cap S = \emptyset$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ und $\mathfrak{q}_j \cap S \neq \emptyset$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ gelte, so hat man

$$S^{-1}I = S^{-1}\mathfrak{p}_1 \cdots S^{-1}\mathfrak{p}_m.$$

(d) Ist A ein Dedekindring, so auch $S^{-1}A$.

Aufgabe 3. Sei R ein kommutativer lokaler Ring und $\mathfrak{m} := R \setminus R^\times$ die Menge seiner Nichteinheiten.

(a) Zeige, dass $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von R ist und zwar das größte Ideal von R, welches 1 nicht enthält.

(b) Zeige das *Lemma von Nakayama*: Ist M ein endlich erzeugter R-Modul mit

$$M = \mathfrak{m}M,$$

so gilt $M = 0$.

Hinweis: Benutze für (b) den Satz von Cayley-Hamilton.

Abgabe bis Mittwoch, den 19. Juni 2019, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.