
Übungsblatt 10 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1. Sei A ein Dedekindring. Zeige:

- (a) Sind $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n \in M_A$ paarweise verschieden und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, so gibt es ein $a \in A$ mit $v_{\mathfrak{p}_i}(a) = \alpha_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.
- (b) Ist M_A endlich, so ist A ein Hauptidealring.

Hinweis: Benutze für (a) den Chinesischen Restsatz.

Aufgabe 2. Sei A ein Integritätsring. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (a) A ist ein Dedekindring.
- (b) A ist noethersch und jede Lokalisierung $A_{\mathfrak{m}}$ nach einem maximalen Ideal \mathfrak{m} von A ist ein Hauptidealring.

Hinweis: Für (a) \implies (b) kann man Aufgabe 2 des letzten Blattes zusammen mit obiger Aufgabe 1(b) benutzen. Für (b) \implies (a) beachte Aufgabe 1 des letzten Blattes.

Aufgabe 3. Sei A ein Integritätsring. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (a) A ist ein Dedekindring.
- (b) Zu jedem Ideal I in A und jedem $a \in I \setminus \{0\}$ gibt es ein $b \in A$ mit $I = (a, b)$.

Hinweis: Für (a) \implies (b) betrachte Primidealzerlegungen von I und (a) und benutze Aufgabe 1(a). Für (b) \implies (a) wende Aufgabe 2 an: Sei \mathfrak{m} ein maximales Ideal von A und $S := A \setminus \mathfrak{m}$. Um zu zeigen, dass $A_{\mathfrak{m}} = S^{-1}A$ ein Hauptidealring ist, zeige mit Hilfe der Voraussetzung (b), dass für jedes Ideal J von $A_{\mathfrak{m}}$ ein $b \in J$ existiert mit $J = JS^{-1}\mathfrak{m} + bA_{\mathfrak{m}}$. Wende das Nakayama-Lemma von Aufgabe 3 auf Blatt 9 auf den $A_{\mathfrak{m}}$ -Modul $J/bA_{\mathfrak{m}}$ an, um $J = bA_{\mathfrak{m}}$ zu schließen.

Abgabe bis Mittwoch, den 26. Juni 2019, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.