Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Jan Beran
Sommersemester 2013

Zeitreihenanalyse

5. Übungsblatt

Aufgabe 5.1 Seien die Funktionen $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in]-\infty, -\frac{\pi}{2}[\\ 1 & \text{falls } x \in [-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}[\\ 3 & \text{falls } x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}[\\ 5 & \text{falls } x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[\\ 6 & \text{falls } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi[\\ 8 & \text{falls } x \in [\pi, \infty[\end{cases} \quad \text{und} \quad G(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in]-\infty, -\pi[\\ 1 & \text{falls } x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}[\\ 2 & \text{falls } x \in [-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}[\\ 4 & \text{falls } x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}[\\ 6 & \text{falls } x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[\\ 7 & \text{falls } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi[\\ 8 & \text{falls } x \in [\pi, \infty[\end{cases}$$

Man definiert $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ und $\psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ durch

$$\gamma(k) := \int_{-\pi}^{\pi} \exp(ik\lambda)\, dF(\lambda) \quad \text{und} \quad \psi(k) := \int_{-\pi}^{\pi} \exp(ik\lambda)\, dG(\lambda)$$

Berechnen Sie γ und begründen Sie warum es sich bei γ um eine Autokovarianzfunktion handelt. Berechnen Sie $\psi(k)$. Ist ψ eine acf? Falls ja, vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Eindeutigkeitsaussage der Spektralverteilung.

Aufgabe 5.2 Seien X und Y zwei schwach stationäre Prozesse mit den Spektralverteilungen F_X bzw. F_Y. Zusätzlich gelte $\text{cov}(X_t, Y_s) = 0$ für alle $s, t \in \mathbb{Z}$. Berechnen Sie die Spektralverteilung des Prozesses $Z := X + Y$.

Aufgabe 5.3 Sei X ein schwach stationärer Prozess mit der Spektraldichte $f(\lambda) = \pi - \frac{|\lambda|^2}{\pi}$ für alle $\lambda \in [-\pi, \pi]$ Bestimmen Sie die Autokovarianzfunktion von X.

Aufgabe 5.4 Seien X und Y zwei stationäre Prozesse mit den Spektraldichten f_X bzw. f_Y. Zusätzlich gelte $f_X(\lambda) \leq f_Y(\lambda)$ für fast alle $\lambda \in [-\pi, \pi]$.

1. Bezeichne $\Gamma_{n,Y}$ bzw. $\Gamma_{n,X}$ die Kovarianzmatrizen der Zufallsvektoren $X(n) := [X_1, \ldots, X_n]'$ bzw. $Y(n) := [Y_1, \ldots, Y_n]'$. Zeigen Sie, dass die Matrix $\Gamma_{n,Y} - \Gamma_{n,X}$ positiv semidefinit ist.
2. Zeigen Sie, dass $\text{var}(b'X(n)) \leq \text{var}(b'Y(n))$ für $b \in \mathbb{R}^n$.

Abgabe: Bis Dienstag, 21.5.2013, 11.45 h, Briefkasten Nr. 15.