Reine Zustände auf Idealen und Darstellung nichtnegativer Polynome

Diplomarbeit

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Verfasser: Sabine Burgdorf
Rheingutstraße 32
78462 Konstanz

1. Gutachter: Prof. Dr. A. Prestel
2. Gutachter: Prof. Dr. C. Scheiderer

Konstanz im September 2005

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **1**

1 Grundlagen **5**

1.1 Funktionalanalytische Grundlagen 5

1.2 Einiges aus der Reellen Algebra 7

2 Reine Zustände **13**

2.1 Zustände auf $\mathbb{Q}$-Vektorräumen 13

2.2 Der Darstellungssatz 14

3 Zustände auf Ringen und Idealen **18**

3.1 Archimedische Semiringe 18

3.2 Archimedische Moduln höherer Stufe 28

4 Darstellung nichtnegativer Polynome **34**

A Lokal-Global-Kriterium für nichtnegative Polynome **44**

Quellen und Referenzen **48**

Einleitung

Artins Lösung des 17. Hilbertschen Problems besagt, dass sich ein auf dem $\mathbb{R}^n$ nichtnegatives Polynom f im Polynomring $\mathbb{R}[\bar{X}] := \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ in n Unbestimmten als Summe von Quadraten rationaler Funktionen darstellen lässt. Mit anderen Worten folgt aus $f \geq 0$, dass $f \in \sum \mathbb{R}(\bar{X})^2$ ist. Dabei bezeichne $\sum \mathbb{R}(\bar{X})^2$ die Menge der Elemente von $\mathbb{R}(\bar{X})$, welche sich als endliche Summe von Elementen $g \in \mathbb{R}(\bar{X})^2$ darstellen lassen.

Betrachtet man Polynome f, welche nicht auf dem ganzen $\mathbb{R}^n$ nichtnegativ sind, sondern nur auf der durch endlich viele Polynome $h_1, \ldots, h_s \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ erzeugten semialgebraischen Menge

$$K := \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_1(x) \geq 0, \ldots, h_s(x) \geq 0\},$$

so ergibt eine Verallgemeinerung von Artins Lösung, dass sich f dann darstellen lässt als

$$f = \sum_{\nu} h^{\nu} \sigma_{\nu} \tag{A}$$

für gewisse $\nu \in \{0,1\}^s$ und $\sigma_\nu \in \sum \mathbb{R}(\bar{X})^2$, wobei $h^\nu = h_1^{\nu_1} \cdots h_s^{\nu_s}$.

Wir interessieren uns für nennerfreie Darstellungen von Polynomen f, welche auf K positiv oder nichtnegativ sind. Im Speziellen interessieren wir uns dafür, unter welchen Bedingungen f eine Darstellung der Gestalt

$$f = \sum_{\nu} \lambda_\nu h^\nu \text{ mit } \lambda_\nu \in \mathbb{R}_{\geq 0} \qquad \text{oder} \tag{B}$$

$$f = \sigma_0 + \sum_{i=1}^{s} \sigma_i h_i \text{ mit } \sigma_i \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2 \tag{B'}$$

besitzt. Wir fragen uns also, wann ein auf K nichtnegatives Polynom in dem durch $h = (h_1, \ldots h_s)$ über $\mathbb{R}_{\geq 0}$ erzeugten Semiring $T(h)$ oder in dem von h erzeugten quadratischen Modul $M(h)$ liegt. Dabei sind $T(h)$ und $M(h)$ gegeben durch die Mengen

$$T(h) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^s} \lambda_\nu h^\nu \text{ mit } \lambda_\nu \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \text{ nur endlich viele } \neq 0 \quad \text{und}$$

$$M(h) = \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2 + \sum_{i=1}^{s} h_i \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2,$$

wobei $\sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2$ die Menge aller endlichen Quadratsummen in $\mathbb{R}[\bar{X}]^2$ bezeichnet. Insbesondere behandeln wir damit auch den klassischen Fall einer endlich erzeugten Präordnung T, welche durch die Menge $T := \sum_\nu h^\nu \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2$ mit $\nu \in \{0,1\}^s$ gegeben ist.

1991 zeigte Schmüdgen [Sch91], dass wir für Polynome f, welche positiv auf K sind, eine Darstellung (A) mit $\sigma_\nu \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2$ finden können, sofern K beschränkt ist. Das heißt, ist K beschränkt, so liegt ein auf K positives Polynom f immer in der durch die h_i erzeugten Präordnung. 1993 zeigte Putinar [Put93] eine entsprechende Aussage für endlich erzeugte quadratische Moduln M, wobei jedoch die Archimedizität von M direkt gefordert wurde, das heißt, es muss $M + \mathbb{Z} = \mathbb{R}[\bar{X}]$ gelten. Dieses ist notwendig, da aus der Beschränktheit von K im Allgemeinen nicht mehr die Archimedizität von T wie im Falle einer Präordnung folgt. Dieses Ergebnis wurde 1999 von Jacobi [Jac99] auf quadratische Moduln und Moduln höherer Stufe erweitert, so dass wir für auf K positive Polynome eine Darstellung (B') also $f = \sigma_0 + \sigma_1 h_1 + \cdots + \sigma_s h_s$ mit $\sigma_i \in \mathbb{R}[\bar{X}]^2$ erhalten, sofern der quadratische Modul M archimedisch ist. Fordert man die Archimedizität des durch die h_i erzeugten Semirings T, so findet man für positive Polynome nach dem Satz von Schmüdgen auch hier eine Darstellung (B). Somit ist die Frage nach einer nennerfreien Darstellung von auf K positiven Polynomen im Wesentlichen geklärt, so dass wir einen Schwerpunkt auf die Untersuchung von Darstellungen nichtnegativer Polynome legen.

Bei nichtnegativen Polynomen ist die Forderung der Archimedizität eines Semirings oder quadratischen Moduls im Allgemeinen nicht mehr hinreichend für eine nennerfreie Darstellung (B) oder (B'). Es gibt zahlreiche Beispiele für auf K nichtnegative Polynome, welche nicht in dem durch h erzeugten Semiring oder quadratischen Modul liegen (Beispiel 3.19 oder 3.28). Andererseits lieferte Scheiderer 2003 [Sch03] mit einem Lokal-Global-Kriterium (Satz A.5 im Anhang) ein hinreichendes Kriterium dafür, wann ein auf K nichtnegatives Polynom in der zu K gehörenden archimedischen Präordnung liegt. Dieses Kriterium konnte er 2004 [Scha] auf quadratische Moduln erweitern. Bei der Untersuchung dieses Kriteriums traten noch weitere Darstellungssätze nichtnegativer Polynome auf, so dass man zumindest unter weiteren Voraussetzungen an das nichtnegative Polynom eine solche nennerfreie Darstellung (B') erhält. Diese Ergebnisse lassen sich teilweise auf Semiringe übertragen, so dass sich hiermit auch Darstellungen der Gestalt (B) ergeben.

Unser Ziel ist es, einige dieser bekannten Resultate anhand eines Darstellungssatzes von Handelman zu beweisen.

Handelman veröffentlichte mit Goodearl im Jahre 1976 [GH76] einen Darstellungssatz für Funktionale, welchen er 1980 zusammen mit Effros und Shen [EHS80] auf partiell geordnete Gruppen erweiterte. In abgewandelter Version [dAT01] lautet er (siehe auch Satz 2.6)

Satz. *Sei V ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum und $C \subset V$ ein konvexer Kegel mit Ordnungseinheit u, sei $f \in V$. Ist $\varphi(f) > 0$ für jeden reinen Zustand auf (V, C, u), dann ist $f \in C$.*

Ein Element $u \in C$ ist eine Ordnungseinheit, falls $\mathbb{Z}u + C = V$ gilt. Ein Zustand ist eine lineare Abbildung $\varphi : A \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(C) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\varphi(u) = 1$. Ist dieser Zustand ein Extremalpunkt der konvexen Menge aller Zustände auf (V, C, u), so ist dieser rein.

Auffällig ist die formale Ähnlichkeit zum Reellen Darstellungssatz (siehe auch Satz 3.6)

Satz (Reeller Darstellungssatz)**.** *Sei A kommutativer Ring und T ein archimedischer Semiring auf A, sei $f \in A$. Ist $\varphi(f) > 0$ für alle $\varphi \in X(T)$, so ist $f \in T$.*

Eine genauere Untersuchung der reinen Zustände auf kommutativen Ringen A mit archimedischem Semiring T zeigt (Satz 3.14), dass die reinen Zustände auf $(A, T, 1)$ mit den Ringhomomorphismen $\varphi \in X(T)$ übereinstimmen. Damit kann man den Darstellungssatz von Handelman auf Probleme der Reellen Algebra übertragen.

Da der Darstellungssatz von Handelman in dieser Form aber auch nur für positive Polynome anwendbar ist, wird ein weiterer Satz von Handelman aus dem Jahre 1985 [Han85] hinzugezogen, welcher reine Zustände auf Idealen klassifiziert (Satz 3.10). Hiermit sind wir dann in der Lage unter gewissen Voraussetzungen auch Nullstellen von f zu erlauben.

Bonsall, Lindenstrauss und Phelps zeigten schon 1966 in [BLP66] ein entsprechendes Resultat für positive Funktionale und Operatoren. Dieser Arbeit sind einige Ideen für die genauere Charakterisierung reiner Zustände auf Idealen entnommen.

Durch eine geeignete Wahl von Idealen und der Charakterisierung der reinen Zustände auf diesen Idealen können hiermit sowohl abstrakte als auch konkrete (also geometrische) Nichtnegativstellensätze abgeleitet werden. Dabei ist im Polynomring $\mathbb{R}[\bar{X}]$ das folgende Resultat (Satz 4.6) besonders anschaulich.

Satz (Scheiderer). *Sei M archimedischer quadratischer Modul auf $\mathbb{R}[\bar{X}]$. Weiter sei $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ mit $f \geq 0$ auf K. Besitzt f nur endlich viele Nullstellen $x_1, \ldots, x_k$ in K, welche alle im Inneren von K liegen, und ist $D^2 f(x_i)$ positiv definit für $i = 1, \ldots, k$, dann ist $f \in M$.*

Mit dem Darstellungssatz von Handelman und der Charakterisierung der reinen Zustände auf Idealen kann man nun diesen Satz direkt beweisen, ohne auf das abstrakte Lokal-Global-Kriterium von Scheiderer (siehe Anhang A) zurückzugreifen.

Im Speziellen ist diese Arbeit wie folgt gegliedert.

- Im ersten Kapitel werden einige funktionalanalytische Begriffe und Sätze erläutert, welche im Hauptteil benötigt werden. Die entsprechenden Sätze und Definitionen sind überwiegend aus [Goo86] übernommen. Neben einigen algebraischen Bemerkungen wird basierend auf [PD01] eine kurze Einführung für Ringe mit Semiringen T oder Moduln M höherer Stufe geliefert. Dabei wird insbesondere der Polynomring $\mathbb{R}[\bar{X}]$ betrachtet, worauf die gegebenen Beispiele in dieser Arbeit basieren.

- Im zweiten Kapitel werden ausgehend von [dAT01], [Goo86] und [Han85] die Definition eines reinen Zustands auf einem $\mathbb{Q}-$Vektorraum liefern und einige erste Eigenschaften gezeigt. Außerdem wird der oben formulierte Darstellungssatz von Handelman bewiesen, auf dessen Grundlage die folgenden Kapitel aufbauen.

- Im dritten Kapitel betrachten wir archimedische Semiringe und archimedische Moduln höherer Stufe auf kommutativen Ringen. Hier werden einige Sätze erarbeitet, die uns die Struktur der reinen Zustände auf Ringen und Idealen mit einem archimedischen Semiring oder Modul höherer Stufe näher bringen. Hieraus folgen mit der erläuterten Übertragung in die Reelle Algebra unter anderen der bekannte Reelle Darstellungssatz, die Positivstellensätze von Schmüdgen und Jacobi im Polynomring $\mathbb{R}[\bar{X}]$ sowie einige abstrakte Nichtnegativstellensätze aus [Sch03] und [Scha]. Hierbei werden die Aussagen mit zahlreichen Beispielen unterlegt.

- Im vierten Kapitel werden wir konkret den Polynomring $\mathbb{R}[\bar{X}]$ betrachten. Dabei untersuchen wir fest gewählte, beispielhafte Präordnungen und Ideale, auf denen wir alle reinen Zustände auf diesen Idealen bestimmen können. Mit den aus diesen Beispielrechnungen gewonnenen Ergebnissen wenden wir uns dem oben erwähnten konkreten

Darstellungssatz nichtnegativer Polynome von Scheiderer aus [Sch03] zu, welcher die Ergebnisse von Jacobi und Putinar auf nichtnegative Polynome erweitert. Dieser wird dann direkt mit dem Darstellungssatz von Handelman bewiesen. Dabei erhalten wir weitere Einblicke in die Struktur der reinen Zustände auf Idealen im Polynomring.

- Im Anhang wird gezeigt, wie man das abstrakte Lokal-Global-Kriterium von Scheiderer in [Sch03] für eine archimedische Präordnung mit den im dritten Kapitel erhaltenen Ergebnissen herleiten kann.

Ich danke meinem Betreuer Markus Schweighofer für seine kompetente Betreuung und die gute Zusammenarbeit, ohne die das vierte Kapitel nicht entstanden wäre. Ihm verdanke ich neben vielen kleinen mathematischen und stilistischen Ratschlägen die wesentlichen Hinweise zu den Beweisen der Sätze 3.14, 3.22 und Satz 4.6.

Weiter danke ich Axel Herguth für die Korrektur der Rechtschreibung und seine Versuche, mir die deutsche Grammatik näher zu bringen, auch wenn ich mich einigen seiner Vorschläge standhaft widersetzt habe.

Schließlich bedanke ich mich bei meinen Kommilitonen und Freunden für fachliche sowie moralische Unterstützung. Ich weiß, ich war anstrengend. Vielen Dank!

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Funktionalanalytische Grundlagen

In diesem Kapitel werden einige funktionalanalytische Begriffe und Sätze, welche später benötigt werden, bereitgestellt.

Sei $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie topologischer Räume. Die *Produkttopologie* auf $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ ist die gröbste Topologie, so dass die kanonischen Projektionen $p_j : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_j$ stetig sind. Für $\prod_{\lambda\in\Lambda} \mathbb{R}$ schreiben wir kurz $\mathbb{R}^\Lambda$. Wir fassen $\mathbb{R}^\lambda$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Abbildungen $\varphi : \Lambda \to \mathbb{R}$ auf vermöge der Einbettung $\varphi \mapsto (\varphi(g))_{g\in\Lambda}$.

1.1 Definition. i) Eine Teilmenge K eines $\mathbb{R}$-Vektorraums heißt *konvex*, wenn sie mit $x_1, x_2 \in K$ auch alle Konvexkombinationen von x_1 und x_2 enthält, das heißt mit x_1 und x_2 sind auch alle x der Gestalt $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ mit $\alpha \in [0,1]$ in K.

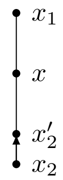
ii) Ein *Extremalpunkt* einer konvexen Menge K ist ein Punkt $x \in K$, welcher sich nicht als echte Konvexkombination zweier Punkte $x_1, x_2 \neq x$ in K schreiben lässt. Hat man also für einen Extremalpunkt $x \in K$ eine Darstellung $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ mit $x_1, x_2 \in K$ und $\alpha \in (0,1)$ so gilt schon $x = x_1 = x_2$.
Die Menge der Extremalpunkte von K sei mit $\partial_e K$ bezeichnet.

Auch wenn die Menge der Extremalpunkte mit $\partial_e K$ bezeichnet werden, muss sie nicht den ganzen Rand der konvexen Menge K bilden. Sie ist jedoch Bestandteil des Randes, da man jeden inneren Punkt einer konvexen Menge als Konvexkombination zweier Punkte aus K darstellen kann.

1.2 Beispiel. Bei der Einheitskreisscheibe $\overline{B(0,1)}$ im $\mathbb{R}^2$ bildet der Rand $S^1 = \partial\overline{B(0,1)}$ die Menge der Extremalpunkte von $\overline{B(0,1)}$. Dagegen sind bei einem regulären ebenen Polyeder P nur seine Eckpunkte extremal, somit ist $\partial P \neq \partial_e P$. Es muss nicht immer einen Extremalpunkt zu einer konvexen Menge geben, so ist zum Beispiel die Menge der Extremalpunkte der offenen Einheitskreisscheibe $B(0,1)$ leer.

In den späteren Kapiteln sind wir an extremalen Punkten interessiert. Um nachzuweisen, dass ein gegebener Punkt ein Extremalpunkt ist, genügt es Konvexkombinationen $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ mit $\alpha = 1/2$ wegen folgender Bemerkung zu betrachten.

1.3 Bemerkung. Jede Konvexkombination $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ mit $x_1, x_2 \in K$ und $\alpha \in [0,1]$ eines gegebenen Punktes $x \in K$ kann man so transformieren, dass $\alpha = 1/2$ ist, indem man gegebenenfalls einen der Eckpunkte x_1 oder x_2 verschiebt. Daher können wir bei Konvexkombinationen ohne Einschränkung $\alpha = 1/2$ wählen.



1.4 Definition. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Topologie τ. Sind Addition und skalare Multiplikation in V stetig bezüglich τ, so wird (V, τ) als *topologischer* $\mathbb{R}$-*Vektorraum* bezeichnet.

Ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit Topologie τ muss nicht notwendig ein topologischer Vektorraum sein. So ist beispielsweise ein Vektorraum, welcher nicht der Nullraum ist, mit diskreter Topologie kein topologischer Vektorraum, da hier die skalare Multiplikation nicht stetig ist.

1.5 Definition. Ein topologischer Vektorraum V ist *lokalkonvex*, wenn jede Nullumgebung in V eine konvexe Nullumgebung enthält.

Fasst man die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als normierten Raum auf, so erhält man mit den üblichen $\varepsilon-$Umgebungen $B(x,\varepsilon) := \{y \in \mathbb{R} \mid \|x-y\| < \varepsilon\}$ zu jeder Nullumgebung eine konvexe Nullumgebung. Damit ist $\mathbb{R}$ ein lokalkonvexer Raum. Aus der Definition der Produkttopologie geht damit sofort hervor, dass auch jede Potenz $\mathbb{R}^\Lambda$ von $\mathbb{R}$ ein lokalkonvexer Raum ist.

Für lokalkonvexe Räume gilt der Satz von Krein-Milman. Dieser besagt, dass eine kompakte, konvexe Teilmenge dieses Raumes schon durch ihre Extremalpunkte charakterisiert wird. Dabei ist eine Menge K kompakt, wenn sie die Heine-Borelsche Überdeckungseigenschaft erfüllt, d.h. jede offene Überdeckung von K enthält eine endliche Teilüberdeckung von K.

1.6 Satz (Krein-Milman)**.** *Ist K eine kompakte, konvexe Teilmenge eines lokalkonvexen topologischen Vektorraums, so ist K gleich dem Abschluss der konvexen Hülle der Extremalpunkte von K.*

Beweis. Dieses ist ein bekanntes Resultat über lokalkonvexe Räume. Ein Beweis findet sich unter anderem in [BCR84] oder [Goo86]. $\square$

Umgekehrt gilt, dass eine Teilmenge $X \subset K$, welche $K = \overline{\mathrm{conv}(X)}$ erfüllt, schon alle Extremalpunkte von K enthalten muss.

Weiter kann man eine nützliche Eigenschaft linearer, stetiger Funktionen auf kompakten, konvexen Teilmengen solcher Räume zeigen. Sie nehmen natürlich ihr Supremum und Infimum auf der kompakten Menge K an, falls $K \neq \emptyset$. Weiter werden diese sogar in einem Extremalpunkt von K angenommen, so dass man den Wertebereich einer linearen, stetigen Funktion auf K allein durch Betrachtung der Werte der Extremalpunkte von K angeben kann. Zum Beweis dieser Aussage benötigen wir noch die Definition einer extremalen Menge.

1.7 Definition. Sei K eine konvexe Menge. Eine Teilmenge $F \subset K$ heißt *extremal*, wenn für alle $x \in F$ mit $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ mit $x_1, x_2 \in K$ und $\alpha \in (0,1)$ schon $x_1, x_2 \in F$ sind, d.h. ist ein Element $x \in F$ in K als Konvexkombination darstellbar, dann ist x auch in F als eben diese Konvexkombination darstellbar.

Da wir die im Folgenden auftretenden Funktionen lediglich nach unten abschätzen wollen, ist das folgende Korollar aus dem Satz von Krein-Milman 1.6 nur für das Infimum der Funktionswerte $f(z)$ formuliert. Man kann eine analoge Aussage für das Supremum zeigen, indem man $-f$ statt f betrachtet.

1.8 Korollar. *Sei $K \neq \emptyset$ eine kompakte, konvexe Teilmenge eines lokalkonvexen Hausdorffraums und $f : K \to \mathbb{R}$ eine lineare und stetige Funktion auf K. Dann existiert ein Extremalpunkt $x \in \partial_e K$ mit $f(x) = \inf_{z \in K} f(z)$.*

Beweis. Sei $m := \inf_{z \in K} f(z)$. Da K kompakt und nichtleer ist, ist m endlich für stetiges f und wird sogar angenommen in K. Somit ist $f^{-1}(\{m\}) =: F$ nichtleer und wegen der Stetigkeit von f abgeschlossen in K, also auch kompakt. Da f linear ist, ist die Menge F konvex, denn sind $x_1, x_2 \in F$, also $f(x_1) = f(x_2) = m$, dann gilt auch $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) = m$ für $\alpha \in [0,1]$. Außerdem ist F extremale Teilmenge von K, denn aus $f(x_1), f(x_2) \geq m$ und $m = f(x) = \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$ folgt $f(x_1) = f(x_2) = m$.

Nach dem Satz von Krein-Milman 1.6 gilt damit $F = \overline{\mathrm{conv}(\partial_e F)}$. Da F extremal ist, sind die Extremalpunkte von F auch Extremalpunkte von K (siehe 1.7). Somit gilt $\partial_e F = \partial_e K \cap F$, also $F = \overline{\mathrm{conv}(\partial_e K \cap F)}$. Da F nichtleer ist, muss ein $x \in \partial_e K$ existieren mit $f(x) = m$. □

1.2 Einiges aus der Reellen Algebra

Sei im Folgenden stets A ein kommutativer Ring mit $\mathbb{Q} \subset A$. Weiter bezeichne $\sum A^2$ die Menge der Elemente von A, welche sich durch eine endliche Quadratsumme in A darstellen lassen.

Es sei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen ≥ 1. Die Menge der nichtnegativen rationalen Zahlen sei mit $\mathbb{Q}_{\geq 0} = \{r \in \mathbb{Q} \mid r \geq 0\}$ bezeichnet, wobei $\leq$ die eindeutig bestimmte Anordnung auf $\mathbb{R}$ ist. Analog sei $\mathbb{R}_{\geq 0}$ die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen.

Eine Teilmenge $T \subset A$ heißt *Semiring* von A, falls gilt:

$$0, 1 \in T, \; T + T \subset T \text{ und } T \cdot T \subset T.$$

Eine *Präordnung* T ist ein Semiring, für den zusätzlich $A^2 \cdot T \subset T$ gilt.

Ein Semiring T heißt *archimedisch*, falls $T + \mathbb{Z} = A$, d.h. zu jedem $f \in A$ existiert eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass $n \pm f \in T$ ist. Die Archimedizität von T liefert die wichtige Identität $T - T = A$, denn: $T + \mathbb{Z} = A$ impliziert $T - \mathbb{N} = A$, da $\mathbb{N} \subset T$ ist; weiter folgt damit $A = T - \mathbb{N} \subset T - T \subset A$, also $T - T = A$.

In Analogie zu einer partiellen Ordnung $\leq$ auf einem Ring schreiben wir

$$a \leq_T b :\Leftrightarrow b - a \in T.$$

Dabei genügt $\leq_T$ allen Axiomen einer partiellen Ordnung mit Ausnahme der Antisymmetrie.

Für einen Semiring T sei $X(T) := \{\varphi \in \mathrm{Hom}(A, \mathbb{R}) : \varphi(T) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}\}$. Damit ist $X(T)$ der Raum der Ringhomomorphismen mit $a \leq_T b \Rightarrow \varphi(a) \leq \varphi(b)$.

Eine Teilmenge $M \subset A$ heißt ein *Modul höherer Stufe*, falls gilt:

$$1 \in M, \; M + M \subset M \text{ und es existiert ein } m \in \mathbb{N} \text{ mit } A^m M \subset M.$$

Dabei wird m als *Stufe* von M bezeichnet. Der kleinste Modul der Stufe m in A ist A^m. Für $m = 2$ wird M als quadratischer Modul bezeichnet, d.h. es gilt $A^2 \cdot M \subset M$.

Allgemeiner bezeichnen wir M als T-Modul, falls neben $1 \in M$ und $M + M \subset M$ zusätzlich $T \cdot M \subset M$ für einen Semiring T gilt. Somit kann man einen quadratischen Modul auch als T-Modul mit $T = \sum A^2$ auffassen.

Wie beim Semiring heiße M archimedisch, falls $M + \mathbb{Z} = A$ gilt. Damit gilt wieder $M - M = A$. Ebenso sei wie im Falle eines Semiringes $\leq_M$ definiert durch

$$a \leq_M b :\Leftrightarrow b - a \in M.$$

Die Menge $X(M)$ sei analog wie für einen Semiring T als Menge der Ringhomomorphismen $\varphi : A \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(M) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ definiert.

Es gilt die folgende wichtige Identität, mit der wir von m-ten Potenzen f^m eines Elements $f \in A$ auf f selbst schließen können.

1.9 Lemma. *Für eine Unbestimmte X und festes $m \in \mathbb{N}$ gilt*

$$m!\, X = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} (-1)^{m-1-i} [(X+i)^m - i^m]$$

Beweis. vgl. [PD01, Ex.7.4.1] Wir definieren für beliebige Polynome $p(X) \in A[X]$ rekursiv $\Delta p(X) := p(X+1) - p(X)$ und $\Delta^e p(X) = \Delta(\Delta^{e-1} p(X))$ für $e \in \mathbb{N}$. Fasst man X^m als Polynom in $A[X]$ auf, so erhält man durch Induktion über $e = 1, \ldots, m-1$ wie folgt, dass

$$\Delta^e X^m = \sum_{i=0}^{e} \binom{e}{i} (-1)^{e-i} (X+i)^m \text{ gilt.}$$

Der Induktionsanfang $e = 1$ ist klar nach Definition von ΔX^m. Für den Induktionsschritt beachte man die Relation $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ der Binomialkoeffizienten und erhält

$$\begin{aligned}
\Delta^e X^m = \Delta(\Delta^{e-1} X^m) &= \Delta\left(\sum_{i=0}^{e-1} \binom{e-1}{i} (-1)^{e-1-i} \big[(X+i-1)^m - (X+i)^m\big] \right) \\
&= \sum_{i=0}^{e-1} \left[\binom{e-1}{i} + \binom{e-1}{i-1} \right] (-1)^{e-i} (X+i)^m + (-1)^{e-1-(e-1)} (X+e)^m \\
&= \sum_{i=0}^{e} \binom{e}{i} (-1)^{e-i} (X+i)^m.
\end{aligned}$$

Durch eine weitere Induktion über e erhält man, dass

$$\Delta^e X^m = m(m-1)\cdots(m-e+1) X^{m-e} + (\text{Terme kleinerer Ordnung})$$

Ein Koeffizientenvergleich für $e = m-1$ liefert

$$\sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} (-1)^{m-1-i} (X+i)^m = m(m-1)\cdots 2X + c = m!\, X + c$$

mit $\deg c = 0$, also konstant. Setzt man $X = 0$, erhält man $c = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} (-1)^{m-1-i} i^m$ und damit die Behauptung. $\square$

Damit erhalten wir sofort, dass für einen Modul M ungerader Stufe schon $M = A$ gilt. Denn ist $m \in \mathbb{N}$ ungerade, so ist $-1 = (-1)^m \in M$ und weiter gilt sogar $-1 \cdot M \subset M$. Mit

Lemma 1.9 erhalten wir für alle $f \in A$, dass

$$m!\, f = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} (-1)^{m-1-i} [\underbrace{(f+i)^m}_{\in M} + \underbrace{(-1)^m i^m}_{\in M}] \in M.$$

Da $\mathbb{Q} \subset A$ ist, folgt $M = A$. Daher sind lediglich Moduln mit gerader Stufe von Interesse, auch wenn wir den trivialen Fall (m ungerade) nicht ausschließen.

Wir werden häufig den Polynomring $\mathbb{R}[\bar{X}]$ betrachten, wobei $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ ein Tupel von n Variablen mit $n \geq 1$ ist.

Seien $h_1, \ldots, h_s \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ gegeben. Dann ist die durch h erzeugte Präordnung

$$T = \mathrm{TP}(h_1, \ldots, h_s) := \sum_{\nu \in \{0,1\}^s} h_1^{\nu_1} \cdots h_s^{\nu_s} \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2,$$

das heißt T ist die kleinste Präordnung in $\mathbb{R}[\bar{X}]$, welche die Polynome $h_1, \ldots, h_s$ enthält. Jedes Element $t \in T$ besitzt damit eine Darstellung $t = \sum_\nu h_1^{\nu_1} \cdots h_s^{\nu_s} \sigma_\nu$ für geeignete $\nu \in \{0,1\}^s$ und $\sigma_\nu \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2$. Weiter bezeichne

$$K_T := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq 0 \text{ für alle } f \in T\}$$

die zu T gehörige basisabgeschlossene semialgebraische Menge der Nichtnegativstellen. Da Quadratsummen stets nichtnegativ sind und mit $h_i \geq 0$ auch alle Produkte der h_i nichtnegativ sind, gilt sogar $K_T = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_1(x) \geq 0, \ldots, h_s(x) \geq 0\}$, d.h. wir brauchen nur die T erzeugenden Polynome $h_1, \ldots, h_s$ zur Bestimmung der Menge K_T zu betrachten.

Der durch h über $\mathbb{R}_{\geq 0}$ erzeugte Semiring T ist gegeben durch

$$T = \mathrm{TS}(h_1, \ldots, h_s) := \sum_{\nu \in \mathbb{N}^s} \lambda_\nu h_1^{\nu_1} \cdots h_s^{\nu_s}, \quad \lambda_\nu \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \text{ nur endliche viele } \neq 0.$$

Wie im Fall einer Präordnung sei K_T die Menge der Nichtnegativstellen von T. Auch hier ergibt sich, dass man lediglich $h_1, \ldots, h_s$ zu betrachten braucht, das heißt, es ist $K_T = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_1(x) \geq 0, \ldots, h_s(x) \geq 0\}$.

Mit $h_0 := 1$ ist der durch h erzeugte quadratische Modul

$$M = M(h_0, \ldots, h_s) := \sum_{i=0}^{s} h_i \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2.$$

Hier erhält man ebenfalls $K_M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_1(x) \geq 0, \ldots, h_s(x) \geq 0\}$.

Später betrachten wir ausschließlich archimedische Semiringe T oder Moduln M höherer Stufe. Die zugehörige Menge K_T (bzw. K_M) liefert uns ein notwendiges und im Falle einer Präordnung auch hinreichendes Kriterium für die Archimedizität von T bzw. M (vgl. dazu [PD01, Kap.5]). Dieses wird durch den folgenden Satz von Schmüdgen ausgedrückt [Sch91] oder [PD01, Thm.5.1.17].

1.10 Satz (Schmüdgen, Version 1)**.** *Seien $h_1, \ldots, h_s \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ und $T = \mathrm{TP}(h_1, \ldots, h_s)$ die durch $h_1, \ldots, h_s$ endlich erzeugte Präordnung von $\mathbb{R}[\bar{X}]$. Dann ist T genau dann archimedisch, wenn K_T in $\mathbb{R}^n$ beschränkt ist.*

Man ist an der Archimedizität einer Präordnung T interessiert, da man dann weiß, dass T schon alle Elemente $f \in A$ mit $f > 0$ auf K_T enthält. Somit kann man den Satz von

Schmüdgen auch wie folgt formulieren [PD01, Thm.5.2.9]. Die Folgerung von Version 2 aus Version 1 wird im dritten Kapitel (Satz 3.7) geliefert.

1.11 Satz (Schmüdgen, Version 2). *Seien $h_1, \dots, h_s \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ und $T = \mathrm{TP}(h_1, \dots, h_s)$ endlich erzeugte Präordnung von $\mathbb{R}[\bar{X}]$. Ist K_T in $\mathbb{R}^n$ beschränkt, so enthält T alle $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ mit $f > 0$ auf K_T.*

Untersucht man einen endlich erzeugten Semiring $T = \mathrm{TS}(h)$, so ist die Kompaktheit von K_T im Allgemeinen nicht mehr hinreichend für die Archimedizität von T. Es gilt aber der folgende Satz von Krivine [Schb] oder [Kri64], welcher uns entsprechend zum Fall einer archimedischen, endlich erzeugten Präordnung die Darstellung von auf K_T positiven Polynomen liefert. Im dritten Kapitel (Satz 3.6) wird dieser Satz bewiesen.

1.12 Satz (Krivine). *Ist T ein archimedischer Semiring, dann ist K_T kompakt und T enthält alle $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ mit $f > 0$ auf K_T.*

Dabei sind die Bedingungen „K_T kompakt und T enthält alle $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ mit $f > 0$ auf K_T“ sogar hinreichend für die Archimedizität von T. Dieses folgt aber trivial.

Ein Polynom $p \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ nennen wir linear, wenn $\deg p \leq 1$ ist. Damit gilt der folgende Satz von Minkowski [PD01, Thm.5.4.5].

1.13 Satz (Minkowski). *Seien die Polynome $f, h_1, \dots, h_s \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ linear und die Menge $K := \{x \in \mathbb{R}^n : h_1(x) \geq 0, \dots, h_s(x) \geq 0\}$ nichtleer. Ist $f \geq 0$ auf K, so besitzt f eine Darstellung $f = a_1 h_1 + \cdots + a_s h_s$ mit $a_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.*

Um die Archimedizität eines Semirings T oder eines quadratischen Moduls M zu zeigen, ist es sinnvoll die Mengen $O_T(A)$ der T-beschränkten Elemente beziehungsweise $O_M(A)$ der M-beschränkten Elemente von A zu betrachten.

1.14 Lemma. *Sei T ein Semiring und M ein quadratischer Modul. Dann bilden die T-beziehungsweise M-beschränkten Elemente von A, definiert durch*

$$O_T(A) := \{f \in A \mid N \pm f \in T \text{ für ein } N \in \mathbb{N}\} \quad \text{und}$$
$$O_M(A) := \{f \in A \mid N \pm f \in M \text{ für ein } N \in \mathbb{N}\}$$

einen Unterring von A.

Beweis. Betrachten wir zunächst die T-beschränkten Elemente $O_T(A)$. Es sind $0, 1 \in O_T(A)$, da $\mathbb{N} \subset T$. Aus der Definition folgt sofort, dass mit $f \in O_T(A)$ auch $-f \in O_T(A)$ gilt, also $-O_T(A) \subset O_T(A)$ ist. Mit $N \pm f_1 \in T$ und $N \pm f_2 \in T$, sind auch $2N \pm (f_1 + f_2) \in T$ und

$$3N^2 \pm f_1 f_2 = (N + f_1)(N \pm f_2) + N(N \mp f_2) + N(N - f_1) \in T.$$

Also ist $O_T(A)$ auch multiplikativ abgeschlossen und damit ein Ring.

Die Menge $O_M(A)$ ist analog zu $O_T(A)$ additiv abgeschlossen. Sie ist ebenfalls multiplikativ abgeschlossen und bildet somit einen Ring: Zunächst folgt aus der Identität

$$N^2 - f^2 = \frac{1}{2N}(N + f)(N - f)^2 + \frac{1}{2N}(N - f)(N + f)^2 \in M,$$

dass mit $f \in O_M(A)$ auch $\pm f^2 \in O_M(A)$ gilt. Weiter erhalten wir damit, dass mit $f_1, f_2 \in O_M(A)$ auch $4 f_1 f_2 = (f_1 + f_2)^2 - (f_1 - f_2)^2 \in O_M(A)$ ist, da $O_M(A)$ additiv abgeschlossen ist. Wegen $\mathbb{Q} \subset A$ ist damit $fg \in O_M(A)$. $\square$

Mit Satz 1.13 und Lemma 1.14 erhalten wir für einen von endlich vielen linearen Polynomen $h_1, \dots, h_s \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ über $\mathbb{R}_{\geq 0}$ erzeugten Semiring T oder quadratischen Modul M, dass T (bzw. M) genau dann archimedisch ist, wenn K_T (bzw. K_M) kompakt ist.

Da Präordnungen auch quadratische Moduln sind, erhalten wir hiermit aus Version 2 von Schmüdgen 1.11 sofort Version 1, da aus der Archimedizität von T die Beschränktheit von K_T trivial folgt.

1.15 Korollar. *Seien endlich viele lineare Polynome $h_1, \dots, h_s \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ gegeben. Dann gilt:*

1. *Der über $\mathbb{R}_{\geq 0}$ endlich erzeugte Semiring $T = \mathrm{TS}(h_1, \dots, h_s)$ ist genau dann archimedisch, wenn K_T kompakt ist.*

2. *Der endlich erzeugte quadratische Modul $M = M(h_1, \dots, h_s)$ ist genau dann archimedisch, wenn K_M kompakt ist.*

Beweis. Die Implikation „$\Rightarrow$“ ist klar für T und M.

Wir zeigen die Behauptung für T. Sie folgt analog für M. Sei also K_T kompakt. Dann existiert zu jedem linearen Polynom $g \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N \pm g \geq 0$ auf K_T. Damit ist aber nach Satz 1.13 schon $N \pm g \in T$, also $g \in O_T(\mathbb{R}[\bar{X}])$. Da $\mathbb{R}$ archimedisch ist, gilt $\mathbb{R} \subset O_T(\mathbb{R}[\bar{X}])$. Nach Lemma 1.14 bildet $O_T(\mathbb{R}[\bar{X}])$ einen Unterring von $\mathbb{R}[\bar{X}]$. Da aber alle konstanten und alle linearen Polynome in $O_T(\mathbb{R}[\bar{X}])$ liegen, ist $O_T(\mathbb{R}[\bar{X}]) = \mathbb{R}[\bar{X}]$ und damit T archimedisch. □

Da Oberringe archimedischer Semiringe trivalerweise wieder archimedisch sind, haben wir hiermit eine ganze Klasse archimedischer Semiringe auf $\mathbb{R}[\bar{X}]$. Entsprechendes gilt für einen archimedischen quadratischen Modul M, da Obermoduln von M ebenfalls archimedisch sind.

Die zwei folgenden Bemerkungen, welche $X(T)$ für einen Semiring T näher charakterisieren, gelten entsprechend für einen Modul M höherer Stufe.

1.16 Bemerkung. Im Polynomring $\mathbb{R}[\bar{X}]$ ist jeder Ringhomomorphismus $\varphi \in X(T)$ schon ein $\mathbb{R}$-Algebrenhomomorphismus, das heißt φ ist $\mathbb{R}$-linear. Damit ist $X(T)$ durch alle Einsetzungen $\varepsilon_x : f \mapsto f(x)$ gegeben, wobei $x \in K_T$ sein muss, damit $\varepsilon_x(T) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ erfüllt ist.

Beweis. Da φ ein Ringhomomorphismus mit $\varphi(1) = 1$ ist, ist φ $\mathbb{Q}$-linear, das heißt, es ist $\varphi_{|\mathbb{Q}} = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$. Wegen $\mathbb{R}_{\geq 0} \subset T$ ist $\varphi_{|\mathbb{R}}$ ordnungserhaltend. Der einzige ordnungserhaltende Ringhomomorphismus auf $\mathbb{R}$, welcher auf $\mathbb{Q}$ trivial ist, ist die Identität auf $\mathbb{R}$. Damit ist φ $\mathbb{R}$-linear. □

1.17 Bemerkung. Somit können wir für $\mathbb{R}[\bar{X}]$ die Mengen $X(T)$ und K_T miteinander identifizieren. Für jedes $\varphi \in X(T)$ existiert nach Bemerkung 1.16 ein $x \in K_T$, so dass $\varphi = \varepsilon_x$ ist. Damit erfüllt ein Element $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ genau dann $\varphi(f) \geq 0$, wenn $f(x) \geq 0$ ist. Damit gilt $\varphi(f) \geq 0$ für alle $\varphi \in X(T)$ genau dann, wenn f nichtnegativ auf K_T ist.

Abschließend noch einige algebraische Bemerkungen.

1.18 Bemerkung. Sind $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ verschiedene maximale Ideale desselben Ringes, dann sind für jedes $N \in \mathbb{N}$ die Ideale $\mathfrak{m}_1^N$ und $\mathfrak{m}_2^N$ teilerfremd.

Beweis. Da $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ maximal und damit teilerfremd sind, gibt es $p \in \mathfrak{m}_1$ und $q \in \mathfrak{m}_2$ mit $p + q = 1$. Weiter gilt:

$$1 = 1^{2N} = (p+q)^{2N} = \sum_{i=0}^{2N} \binom{2N}{i} p^i q^{2N-i}$$

Da nun in jedem Summanden entweder p^N oder q^N vorkommt, ist $1 \in \mathfrak{m}_1^N + \mathfrak{m}_2^N$ □

1.19 Bemerkung. Sei A ein kommutativer Ring mit $\mathbb{Q} \subset A$ und archimedischem Semiring T. Ist $\mathbb{R} \subset A$, so ist nach Bemerkung 1.16 jeder Ringhomomorphismus $\varphi \in X(T)$ schon $\mathbb{R}$-linear. Ist $\mathbb{R} \not\subset A$, so ist φ im Allgemeinen nur $\mathbb{Q}$-linear. Durch Tensorieren kann man jedoch eine zugehörige $\mathbb{R}$-lineare Abbildung konstruieren.

Dazu betrachten wir den Ring $A' := \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} A$ mit zugehörigem Semiring $T' := \sum \mathbb{R}_{\geq 0} \otimes_{\mathbb{Q}} T$. Dann ist das Einselement gegegeben durch $1 \otimes 1$. Da sowohl $\mathbb{R}_{\geq 0}$ als auch T archimedisch sind, ist T' archimedisch. Dafür genügt es, lediglich die Erzeugenden $r \otimes 1$ und $1 \otimes t$ mit $r \in \mathbb{R}$ und $t \in T$ bezüglich T' zu beschränken, da die T'-beschränkten Elemente von A' nach Lemma 1.14 einen Unterring bilden. Zu $r \otimes 1$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N - r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Damit ist $(N \otimes N) - (r \otimes 1) = (N^2 \otimes 1) - (r \otimes 1) = (N^2 - r) \otimes 1 \in \mathbb{R}_{\geq 0} \otimes T \subset T'$. Analog folgt für $N \in \mathbb{N}$ mit $N - t \in T$, dass $(N \otimes N) - (1 \otimes t) = (1 \otimes N^2) - (1 \otimes t) = 1 \otimes (N^2 - t) \in T'$.

Zu gegebenem $\varphi \in X(T)$ betrachten wir $1 \otimes \varphi : \mathbb{R} \otimes A \to \mathbb{R}, r \otimes f \mapsto r\varphi(f)$. Dann ist $1 \otimes \varphi$ nach Konstruktion $\mathbb{R}$-linear.

Es ist A ein kanonischer $\mathbb{Q}$-Untervektorraum von $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} A$. Damit folgt sofort aus $1 \otimes \varphi_1 = 1 \otimes \varphi_2$, wobei $\varphi_1, \varphi_2 \in X(T)$ sind, dass schon $\varphi_1 = \varphi_2$ ist, da man φ_i als Einschränkung von $1 \otimes \varphi_i$ auf den $\mathbb{Q}$-Vektorraum A auffassen kann.

Bemerkung 1.19 gilt analog für quadratische Moduln.

Kapitel 2

Reine Zustände

1980 formulierten Effros, Handelman und Shen [EHS80] auf Grundlage der Arbeit [GH76] von Goodearl und Handelman aus dem Jahre 1976 einen Darstellungssatz (Satz 2.6). Dieser stellt in einer Formulierung von [dAT01] die elementare Grundlage der weiteren Überlegungen dar. In diesem Kapitel wird der für uns grundlegende Begriff eines Zustands im Rahmen von $\mathbb{Q}-$Vektorräumen V mit konvexem Kegel C eingeführt und der besagte Darstellungssatz bewiesen.

2.1 Zustände auf $\mathbb{Q}$-Vektorräumen

Sei V ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum und $C \subset V$ ein konvexer Kegel in V, das heißt, es gilt

$$0 \in C, C + C \subset C \text{ und } \mathbb{Q}_{\geq 0} \cdot C \subset C.$$

Da wir im dritten Kapitel Semiringe T und Moduln M höherer Stufe als konvexe Kegel betrachten, sei analog dazu $\leq_C$ in Vdefiniert durch

$$f \leq_C g :\Leftrightarrow g - f \in C.$$

Die Archimedizität einer Präordnung im Polynomring $\mathbb{R}[\bar{X}]$ liefert uns beispielsweise nach dem Satz von Schmüdgen 1.11 aus dem letzten Kapitel eine gewisse Darstellung positiver Polynome. Daher wollen wir auch hier eine entsprechende Definition der Archimedizität von C liefern, wobei jedoch das Einselement durch ein ausgezeichnetes Element u ersetzt werden muss, da im Allgemeinen nicht $1 \in C$ gilt.

2.1 Definition. Ein Element $u \in C$ heißt *Ordnungseinheit* von (V, C), falls $\mathbb{Z}u + C = V$ gilt, das heißt zu jedem $f \in V$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $f \leq_C Nu$.

Damit ergibt sich für $u = 1$ und $V = A$ die übliche Definition der Archimedizität, d.h. zu jedem $f \in A$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $f \leq_C N$.

Sei ab jetzt V stets ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum mit konvexem Kegel C und Ordnungseinheit u.

Der Raum der $\mathbb{Q}$-Vektorraum-Homomorphismen von V nach $\mathbb{R}$ sei $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, \mathbb{R})$. Damit kommen wir zur wesentlichen Definition eines Zustands [Goo86] oder [Han85].

2.2 Definition. (a) Eine Abbildung $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, \mathbb{R})$ mit $\varphi(C) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\varphi(u) = 1$ heißt *Zustand* auf (V, C, u).

(b) Es bezeichne $S(V, C, u) := \{\varphi \mid \varphi \text{ Zustand von } (V, C, u)\}$ die Menge aller Zustände auf (V, C, u).

(c) Die Menge der Extremalpunkte von $S(V, C, u)$ sei mit $\partial_e S(V, C, u)$ bezeichnet. Die Elemente $\varphi \in \partial_e S(V, C, u)$ werden *reine Zustände* genannt.

2.3 Bemerkung. Für $f, g \in V$ und $\varphi \in S(V, C, u)$ gilt damit $f \leq_C g \Rightarrow \varphi(f) \leq \varphi(g)$.

2.4 Beispiel. i) Es sei X ein kompakter topologischer Raum. Wir versehen den Raum $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ der stetigen Funktionen nach $\mathbb{R}$ mit der punktweisen Ordnung (also $f \geq 0 :\Leftrightarrow f(x) \geq 0$ für alle $x \in X$), dann ist $u := 1$ eine Ordnungseinheit von $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Sei μ ein positives normiertes Borelmaß auf X, das heißt μ ist eine abzählbar additive Abbildung mit $\mu(Y) \geq 0$ für alle messbaren $Y \subset X$ und es gilt $\mu(X) = 1$. Dann ist die Abbildung $\varphi : f \mapsto \int f d\mu$ ein Zustand auf $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

ii) Der Einsetzungshomomorphismus $\psi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$, $\psi(f) := f(a)$ für festes $a \in K_T$ ist ein Zustand auf $(\mathbb{R}[\bar{X}], T, 1)$, wenn man $\mathbb{R}[X]$ mit einer archimedischen Präordnung T versieht.

2.5 Bemerkung. Ist V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und der konvexe Kegel C auf V derart, dass $C - C = V$ gilt, so sind die Zustände $\varphi \in S(V, C, u)$ sogar $\mathbb{R}$-linear.

Beweis. Sei $a \in \mathbb{R}$ ohne Einschränkung ≥ 0 (sonst betrachte man $-a$). Dazu definieren wir $I_a := \{r \in \mathbb{Q} \mid r < a\}$ und $J_a := \{s \in \mathbb{Q} \mid a < s\}$. Dann gilt wegen Bemerkung 2.3 für $r \in I_a, s \in J_a$ und $f \in C$

$$\varphi(rf) \leq \varphi(af) \leq \varphi(sf) \text{ und damit } r\varphi(f) \leq \varphi(af) \leq s\varphi(f), \text{ da } \varphi \text{ } \mathbb{Q}\text{-linear ist.}$$

Ist nun $\varphi(f) = 0$, folgt sofort $\varphi(af) = 0 = a\varphi(f)$. Für $\varphi(f) \neq 0$ ist

$$r \leq \frac{\varphi(af)}{\varphi(f)} \leq s \text{ in } \mathbb{R}.$$

Geht man nun zum Supremum von I_a und zum Infimum von J_a über, so bleiben diese Ungleichungen erhalten. Damit muss dann aber $\frac{\varphi(af)}{\varphi(f)} = a$ sein.

Wegen $C - C = V$ können wir jedes Element $f \in V$ darstellen durch $f = g_1 - g_2$ für gewisse $g_1, g_2 \in C$. Damit folgt die Behauptung aus der Linearität von φ. □

Betrachten wir im dritten Kapitel archimedische Semiringe T und Moduln M höherer Stufe auf kommutativen Ringen A, so gilt für diese aufgrund der Archimedizität die geforderte Eigenschaft $T - T = A$ beziehungsweise $M - M = A$. Insbesondere sind alle Zustände auf dem Polynomring $\mathbb{R}[\bar{X}]$ mit archimedischem T oder M schon $\mathbb{R}$-linear.

2.2 Der Darstellungssatz

Nach Bemerkung 2.3 gilt für alle Zustände $\varphi \in S(V, C, u)$, dass aus $f \leq_C g$ schon $\varphi(f) \leq \varphi(g)$ folgt. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht. Ist aber $\varphi(f) > 0$ für alle Zustände φ auf einem $\mathbb{Q}$-Vektorraum V mit konvexem Kegel C und Ordnungseinheit u , so ist $f \in C$. Das heißt also, ist $\varphi(f) < \varphi(g)$ für alle Zustände auf (V, C, u), so folgt $f \leq_C g$. Mit dem

Satz von Krein-Milman 1.6 kann man zeigen, dass es genügt, lediglich die Werte $\varphi(f)$ der reinen Zustände für ein $f \in V$ zu betrachten.

Die Werte der reinen Zustände auf (V, C, u) lassen uns somit auf Elemente in C schließen. Es gilt der folgende wichtige Satz [dAT01].

2.6 Satz (Handelman)**.** *Sei $f \in V$, dann gilt: Ist $\varphi(f) > 0$ für jeden reinen Zustand $\varphi \in \partial_e S(V, C, u)$, so ist $f \in C$.*

Zum Beweis ist noch Einiges zu zeigen. Daher sei hier eine kurze Beweisskizze nach [dAT01] angegeben. Zunächst betrachten wir Zustände auf Untervektorräumen und ihre Fortsetzungen. Damit erhalten wir dann in Lemma 2.8 eine Beschreibung der Wertemenge $\{\varphi(g) \mid \varphi \in S\}$ für $g \in V$ erzeugt durch alle Zustände $\varphi \in S = S(V, C, u)$. Weiter zeigen wir, dass wir den Satz von Krein-Milman 1.6 bzw. das daraus resultierende Korollar 1.8 anwenden können, so dass wir von der Wertemenge $\{\psi(g) \mid \psi \in \partial_e S\}$ der reinen Zustände auf die Wertemenge $\{\varphi(g) \mid \varphi \in S\}$ aller Zustände $\varphi \in S(V, C, u)$ schließen können. Damit lässt sich dann mit Lemma 2.8 der Darstellungssatz 2.6 beweisen.

2.7 Lemma. *Sei $W \subset V$ ein Untervektorraum (UVR) mit $u \in W$. Weiter seien $f \in V$ und $\varphi \in S(W, W \cap C, u)$ fest gewählt. Setze*

$$\alpha_f := \sup\{\varphi(w) \mid w \in W, w \leq_C f\},$$
$$\beta_f := \inf\{\varphi(w) \mid w \in W, f \leq_C w\}.$$

Dann gilt im Falle $S(W, W \cap C, u) \neq \emptyset$:

(a) $-\infty < \alpha_f \leq \beta_f < \infty$

(b) Ist $\psi \in S(W + \mathbb{Q}f, (W + \mathbb{Q}f) \cap C, u)$ eine Fortsetzung von φ, dann gilt $\alpha_f \leq \psi(f) \leq \beta_f$.

(c) Für jedes $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_f \leq \gamma \leq \beta_f$ existiert ein $\psi \in S(W + \mathbb{Q}f, (W + \mathbb{Q}f) \cap C, u)$, so dass ψ Fortsetzung von φ ist mit $\psi(f) = \gamma$.

(d) Der Zustand $\varphi \in S(W, W \cap C, u)$ lässt sich fortsetzen zu einem Zustand auf (V, C, u).

Beweis. Sei $A := \{\varphi(w) \mid w \in W, w \leq_C f\}$ und $B := \{\varphi(w) \mid w \in W, f \leq_C w\}$.

(a) Nach Definition der Ordnungseinheit u existieren zu $f \in V$ natürliche Zahlen L und N mit $-Lu \leq_C f \leq_C Nu$. Da $S(W, W \cap C, u) \neq \emptyset$ ist, ist damit $-L = \varphi(-Lu) \in A$ und $N \in B$, also $-L \leq \sup A = \alpha_f$ und $\beta_f = \inf B \leq N$. Da $w \leq_C f \leq_C w'$ für $\varphi(w) \in A$ und $\varphi(w') \in B$ gilt, ist stets $\varphi(w) \leq \varphi(w')$ und damit $\alpha_f \leq \beta_f$.

(b) Sei ψ Fortsetzung von φ auf $(W + \mathbb{Q}f, (W + \mathbb{Q}f) \cap C, u)$. Dann gilt für alle $w \in W$ mit $w \leq_C f$, dass $\varphi(w) = \psi(w) \leq \psi(f)$, also $\alpha_f \leq \psi(f)$. Analog folgt $\psi(f) \leq \beta_f$.

(c) Wir definieren die $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung $\psi : W + \mathbb{Q}f \to \mathbb{R}, \psi(w + rf) := \varphi(w) + r\gamma$. Dann ist ψ eine wohldefinierte Abbildung: Ist $f \notin W$, so ist $W + \mathbb{Q}f = W \oplus \mathbb{Q}f$ und damit ψ wohldefiniert. Ist $f \in W$, dann ist $\alpha_f = \beta_f = \varphi(f)$, also $\gamma = \varphi(f)$. Damit ist $\psi = \varphi$ und somit wohldefniert.

Weiter ist $\psi((W + \mathbb{Q}f) \cap C) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$: Sei $w + rf \geq_C 0$, dann gibt es drei Fälle zu unterscheiden. Ist $r = 0$, so ist $\psi = \varphi$, also $\psi(w + rf) = \psi(w) = \varphi(w) \geq 0$. Ist $r > 0$, so gilt $\frac{w}{-r} \leq_C f$, also $\frac{\varphi(w)}{-r} \in A$. Damit ist $\frac{\varphi(w)}{-r} \leq \alpha_f \leq \gamma$, also $\varphi(w) + r\gamma \geq 0$. Ist $r < 0$, so ist

$\frac{w}{-r} \geq_C f$, also $\frac{\varphi(w)}{-r} \in B$. Damit ist $\frac{\varphi(w)}{-r} \geq \beta_f \geq \gamma$, also $\varphi(w) + r\gamma \geq 0$.
Damit folgt, dass ψ ein Zustand auf $(W + \mathbb{Q}f, (W + \mathbb{Q}f) \cap C, u)$ ist, welcher φ fortsetzt.

(d) Dieses zeigen wir mit dem Lemma von Zorn.

Sei $M := \{(U, \psi) \mid U$ UVR mit $W \subset U \subset V, \psi \in S(U, U \cap C, u), \psi|_W = \varphi\}$. Die partielle Ordnung auf M sei gegeben durch $(U, \psi) \leq (U', \psi') :\Leftrightarrow U \subset U', \psi'|_U = \psi$. Dann ist M wegen $S(W, W \cap C, u) \neq \emptyset$ nichtleer und jede Kette $(U_i, \psi_i)_{i \in I}$ ist in kanonischer Weise beschränkt durch $(\tilde{U}, \tilde{\psi})$ mit $\tilde{U} = \bigcup_{i \in I} U_i$ und $\tilde{\psi}(f) := \psi_i(f)$ für $f \in U_i$. Damit existiert ein maximales Element (U, ψ) in M. Es ist also nur noch $U = V$ zu zeigen:

Angenommen, $U \neq V$. Dann existiert ein Element $g \in V \setminus U$. Betrachtet man α_g und β_g, dann ist $\alpha_g \leq_C \beta_g$ nach (a) und somit ist ψ nach (c) fortsetzbar zu einem Zustand auf $U + \mathbb{Q}g \neq U$ im Widerspruch zur Maximalität von (U, ψ). □

Hiermit können wir das folgende elementare Lemma für den Beweis von Satz 2.6 zeigen.

2.8 Lemma. *Seien (V, C, u) gegeben mit $S(V, C, u) \neq \emptyset$, sei $f \in V$. Setze*

$$\alpha_f := \sup\{r \mid r \in \mathbb{Q}, ru \leq_C f\},$$
$$\beta_f := \inf\{s \mid s \in \mathbb{Q}, f \leq_C su\}.$$

Dann gilt:

(a) $-\infty < \alpha_f \leq \beta_f < \infty$

(b) Für $\varphi \in S(V, C, u)$ ist $\alpha_f \leq \varphi(f) \leq \beta_f$.

(c) Für jedes $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_f \leq \gamma \leq \beta_f$ existiert ein $\varphi \in S(V, C, u)$ mit $\varphi(f) = \gamma$.

Beweis. Sei $A' := \{r \mid r \in \mathbb{Q}, ru \leq_C f\}$ und $B' := \{s \mid s \in \mathbb{Q}, f \leq_C su\}$.

(a) Für $W = \mathbb{Q}u$ folgt mit $\varphi(ru) = r$ die Behauptung direkt aus Lemma 2.7(a).

(b) Für alle $r \in \mathbb{Q}$ mir $ru \leq_C f$ gilt $\varphi(ru) = r \leq \varphi(f)$, also $\alpha_f \leq \varphi(f)$. Analog erhält man $\varphi(f) \leq \beta_f$.

(c) Setze $W = \mathbb{Q}u$, dann existiert ein Zustand ψ auf W (nämlich der durch $\psi : u \mapsto 1$ induzierte $\mathbb{Q}$-Vektorraumhomomorphismus). Hierauf wenden wir Lemma 2.7(c) an, d.h. wir finden eine Fortsetzung ψ' auf $S(\mathbb{Q}u + \mathbb{Q}f, (\mathbb{Q}u + \mathbb{Q}f) \cap C, u)$ von ψ mit $\psi'(f) = \gamma$. (Beachte, für $W = \mathbb{Q}u$ ist $A = A'$ und $B = B'$). Lemma 2.7(d) liefert dann eine Fortsetzung φ von ψ' und damit von ψ auf ganz (V, C, u). □

Somit sind alle Werte $\varphi(f)$ durch α_f und β_f beschränkt. Weiter werden sogar alle Werte zwischen α_f und β_f angenommen.

2.9 Korollar. *Ist $C \neq V$, dann ist $S(V, C, u) \neq \emptyset$.*

Beweis. Da $C \neq V$ ist, ist $-u \notin C$. Damit besitzt der Untervektorraum $W = \mathbb{Q}u$ den durch $u \mapsto 1$ induzierten Zustand $\psi \in S(\mathbb{Q}u, C \cap \mathbb{Q}u, u)$. Nach Lemma 2.8(c) lässt sich dieser auf (V, C, u) fortsetzen. □

Kommen wir nun zur topologischen Betrachtung von $S(V, C, u)$. Wir versehen $\mathbb{R}^V = \prod_{g \in V} \mathbb{R}$ mit der Produkttopologie, so dass $\mathbb{R}^V$ zu einem topologischen Vektorraum wird.

Fasst man $S(V,C,u)$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum auf, dann bildet $S(V,C,u)$ eine Teilmenge des $\mathbb{R}^V$. Wir machen $S(V,C,u)$ mit der Teilraumtopologie zu einem topologischen Raum, d.h. $S(V,C,u)$ ist mit der schwächsten Topologie versehen, so dass für alle $g \in V$ die Abbildungen $\Phi_g : S(V,C,u) \to \mathbb{R}, \varphi \mapsto \varphi(g)$ stetig sind.

2.10 Lemma. *Es ist $S(V,C,u)$ eine kompakte, konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^V$.*

Beweis. Es ist klar, dass $S(V,C,u)$ eine konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^V$ ist, da Konvexkombinationen von Zuständen wieder Zustände bilden.

Es ist nur noch zu zeigen, dass $S(V,C,u)$ kompakt ist: Zu $f \in V$ existiert ein $N_f \in \mathbb{N}$ mit $-N_f u \leq f \leq N_f u$. Damit gilt $-N_f \leq \varphi(f) \leq N_f$ für alle $\varphi \in S(V,C,u)$, also ist $S(V,C,u) \subset \prod_{f\in V}[-N_f, N_f]$. Nach dem Satz von Tychonoff ist das Produkt kompakter Mengen wieder kompakt, also ist $S(V,C,u)$ Teilmenge einer kompakten Menge. Weiter besteht $S(V,C,u)$ aus dem Schnitt abgeschlossener Mengen der Gestalt

$$\begin{aligned}
&\{f \in \mathbb{R}^V \mid f(x+y) = f(x) + f(y)\} && (x, y \in V)\\
&\{f \in \mathbb{R}^V \mid f(x) \geq 0\} && (x \in C)\\
&\{f \in \mathbb{R}^V \mid f(u) = 1\},
\end{aligned}$$

ist also selbst abgeschlossen und damit kompakt. □

Hiermit können wir nun den Darstellungssatz 2.6 beweisen.

Beweis von Satz 2.6. Ist $C = V$, so ist die Behauptung trivial. Sei also $C \neq V$, dann ist $S(V,C,u) \neq \emptyset$ nach Korollar 2.9. Für festes $f \in V$ ist die Abbildung $\Phi_f : S(V,C,u) \to \mathbb{R}, \varphi \mapsto \varphi(f)$ linear und stetig auf der Menge $S = S(V,C,u)$, welche nach Lemma 2.10 eine kompakte, konvexe Teilmenge des lokalkonvexen Hausdorffraums $\mathbb{R}^V$ ist. Damit nimmt Φ_f nach Lemma 1.8 das Infimum $\inf_{\varphi'\in S} \varphi'(f)$ in einem Extremalpunkt $\psi \in \partial_e S(V,C,u)$ an. Somit ist nach Voraussetzung $\varphi(f) \geq \inf_{\varphi'\in S} \varphi'(f) = \psi(f) > 0$ für *alle* Zustände $\varphi \in S(V,C,u)$.

Wählt man in Lemma 2.8(c) die reelle Zahl $\gamma = \alpha_f$, so gilt $\alpha_f \leq \gamma \leq \beta_f$ und damit existiert dann ein $\varrho \in S(V,C,u)$ mit $\varrho(f) = \alpha_f$. Hierfür gilt wie eben gezeigt $\varrho(f) > 0$, also $\alpha_f > 0$. Damit existiert ein $r \in A' = \{r \mid r \in \mathbb{Q}, ru \leq_C f\}$ mit $r > 0$, also $0 \leq_C ru \leq_C f$, das heißt aber $f \in C$. □

Kapitel 3

Zustände auf Ringen und Idealen

Wir werden jetzt Zustände auf kommutativen Ringen A mit $\mathbb{Q} \subset A$ untersuchen. Dabei werden wir konvexe Kegel C betrachten, welche entweder durch einen Semiring T oder einen Modul M höherer Stufe gegeben sind.

Unser Ziel ist es, verschiedene bekannte Darstellungssätze wie beispielsweise den Reellen Darstellungssatz 3.6 [Schb], [PD01] mit dem Darstellungssatz 2.6 zu beweisen. Dabei interessieren uns besonders die Nichtnegativstellensätze. Der Reelle Darstellungssatz fordert von einem Element $f \in A$ die Positivität bezüglich aller reellwertigen Ringhomomorphismen $\varphi \in X(T)$, ist somit also ein Positivstellensatz. Diese Bedingung soll später abgeschwächt werden zur Nichtnegativität.

Da der Ring A auch ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum ist, gelten die Definitionen aus Kapitel 2.1. Es bleibt $S(A, C, 1) = \{\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(A, \mathbb{R}) : \varphi(C) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}, \varphi(1) = 1\}$ der Raum der reellwertigen $\mathbb{Q}$-Vektorraumhomomorphismen φ mit $\varphi(C) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$. In Korollar 3.5 und 3.25 werden wir sehen, dass die reinen Zustände von $S(A, C, 1)$ gerade den Raum $X(C)$ der reellwertigen Ringhomomorphismen mit $\varphi(C) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ ergeben.

Man kann Zustände auch allgemein auf Idealen I von A definieren, da diese hier insbesondere $\mathbb{Q}$-Vektorräume bilden. Dabei gilt im Allgemeinen $u \neq 1$. Hierauf wollen wir die reinen Zustände weiter untersuchen. Es wird sich zeigen, dass neben den Einschränkungen der reinen Zustände auf A noch weitere reine Zustände existieren, welche jedoch ebenfalls einer gewissen Struktur unterliegen.

Da sowohl Semiringe als auch quadratische Moduln natürliche Verallgemeinerungen von Präordnungen sind, gelten alle Aussagen dieses Kapitels auch für archimedische Präordnungen.

3.1 Archimedische Semiringe

Für diesen Abschnitt gelte die folgende **Generalvoraussetzung**:

Sei A stets ein kommutativer Ring mit $\mathbb{Q} \subset A$ und $T \subset A$ ein Semiring mit $\mathbb{Q}_{\geq 0} \subset T$. Dann bildet T einen konvexen Kegel im $\mathbb{Q}$-Vektorraum A mit $T \cdot T \subset T$. Weiter sei T stets archimedisch, um zu gewährleisten, dass T eine Ordnungseinheit besitzt, nämlich $u := 1$.

Wir werden die meisten Aussagen gleich für Zustände auf Idealen I mit konvexem Kegel

$C = I \cap T$ und einer Ordnungseinheit u zeigen, so dass wir für $u = 1$ die Aussagen auf dem Ring A erhalten. Dabei untersuchen wir im Speziellen die Eigenschaften der reinen Zustände, da diese für den Darstellungssatz 2.6 von Bedeutung sind.

Sei $I \subset A$ ein Ideal mit Ordnungseinheit u von $(I, I \cap T)$. Solche Ideale existieren nach der folgenden Proposition.

3.1 Proposition. *Sei I ein durch endlich viele Elemente $t_1, \ldots, t_s \in T$ erzeugtes Ideal. Dann ist $u := \sum_{i=1}^{s} t_i$ eine Ordnungseinheit von $(I, I \cap T)$.*

Beweis. Sei $p \in I$, dann besitzt p eine Darstellung $p = f_1t_1 + \cdots + f_st_s$ mit $f_i \in A$. Da T archimedisch ist, existiert zu jedem $f_i \in A$ ein $n_i \in \mathbb{N}$ mit $f_i \leq_T n_i$. Setzt man $N := \max_{i=1,\ldots,s} n_i$, so gilt $p = f_1t_1 + \cdots + f_st_s \leq_T n_1t_1 + \cdots + n_st_s \leq_T N \sum_{i=1}^{s} t_i$, da T multiplikativ abgeschlossen ist. □

Dennoch kann die Menge der Zustände auf einem Ideal I mit Ordnungseinheit u leer sein wie das folgende Beispiel zeigt.

3.2 Beispiel. Wir versehen den Polynomring $\mathbb{R}[X, Y]$ mit der endlich erzeugten Präordnung $T = \mathrm{TP}(1 - X^2 - Y^2, X^2 + Y^2 - 1)$. Dann ist K_T der Rand der Einheitssphäre im $\mathbb{R}^2$, also beschränkt. Damit ist T archimedisch nach Satz 1.10. Wir betrachten das Ideal $I = (1 - X^2 - Y^2)$. Dann ist $u = 1 - X^2 - Y^2$ nach Propositin 3.1 eine Ordnungseinheit von $(I, I \cap T)$. Es gilt $I \subset \operatorname{supp} T = T \cap -T$, also ist $\varphi(I) = 0$ und damit $\varphi(u) = 0 \neq 1$ für jeden Vektorraumhomomorphismus $\varphi : \mathbb{R}[X, Y] \to \mathbb{R}$. Somit ist die Menge $S(\mathbb{R}[X, Y], I, u)$ der Zustände leer.

Wir benötigen noch die folgende nützliche Definition.

3.3 Definition. Sei I ein Ideal von A mit Ordnungseinheit u von $(I, I \cap T)$. Weiter sei $\varphi \in S(I, I \cap T, u)$ und $t \in A$ derart, dass $\varphi(tu) > 0$ gilt. Wir definieren die *Lokalisierung* von φ in t durch

$$\varphi_t(f) = \frac{\varphi(tf)}{\varphi(tu)}.$$

Gilt $\varphi(tf) \geq 0$ für alle $f \in T$, so ist wegen $\varphi(tu) > 0$ mit φ auch φ_t ein Zustand auf $(I, I \cap T, u)$.

Die reinen Zustände auf einem Ideal erfüllen eine wesentliche Relation, wodurch später (Satz 3.10) eine Charakterisierung dieser Zustände möglich ist. Dabei wird die Lokalisierung φ_u von besonderer Bedeutung sein.

3.4 Satz. *Sei I ein Ideal mit Ordnungseinheit u von $(I, I \cap T)$ und $\varphi \in \partial_e S(I, I \cap T, u)$ gegeben. Dann gilt für $f \in A$ und $p \in I$*

$$\varphi(fp) = \varphi(fu)\varphi(p).$$

Beweis. Sei $f \in T$ fest gewählt. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq_T f \leq_T N$. Damit gilt dann wegen $Tu \subset T \cap I$, dass $0 \leq_T fu \leq_T Nu$, also $0 \leq \varphi(fu) \leq N\varphi(u) = N$. Ohne Einschränkung kann man N so groß wählen, dass sogar $\varphi(fu) < N$ gilt.

Ist $\varphi(fu) = 0$, so gilt für $p \in I \cap T$ und $L \in \mathbb{N}$ mit $p \leq_T Lu$ die Abschätzung

$$0 \leq \varphi(fp) \leq \varphi(fLu) = L\varphi(fu) = 0.$$

Insbesondere gilt dann $\varphi(fp) = 0 = \varphi(fu)\varphi(p)$. Da $I = (I \cap T) - (I \cap T)$ ist, gilt dies sogar für alle $p \in I$.

Für $\varphi(fu) \neq 0$ ist die Lokalisierung φ_f aus Definition 3.3 ein wohldefinierter Zustand auf $(I, I \cap T, u)$. Weiter ist auch φ_{N-f} ein Zustand auf $(I, I \cap T, u)$, da N so gewählt war, dass $N - f \in T$ und $\varphi((N-f)u) > 0$ ist. Setzt man $\alpha := \frac{1}{N}\varphi(fu) \in (0,1)$, so gilt

$$\begin{aligned}\alpha\varphi_f(p) + (1-\alpha)\varphi_{N-f}(p) &= \frac{1}{N}\varphi(fu)\frac{\varphi(fp)}{\varphi(fu)} + \frac{1}{N}(N - \varphi(fu))\frac{\varphi((N-f)p)}{\varphi((N-f)u)} \\ &= \frac{1}{N}\big[\varphi(fp) + \varphi((N-f)p)\big] = \varphi(p),\end{aligned}$$

also $\alpha\varphi_f + (1-\alpha)\varphi_{N-f} = \varphi$. Da φ ein Extremalpunkt in $S(I, I \cap T, u)$ ist, muss $\varphi = \varphi_f = \varphi_{N-f}$ sein und damit ist $\varphi(fu)\varphi(p) = \varphi(fu)\varphi_f(p) = \varphi(fp)$ für alle $f \in T$ und $p \in I$. □

Hiermit erhält man sofort, dass reine Zustände auf dem Ring A multiplikativ sind. Es gilt also $\partial_e S(A, T, 1) \subset X(T)$.

3.5 Korollar. *Jedes $\varphi \in \partial_e S(A, T, 1)$ ist multiplikativ.*

Beweis. Es gilt Satz 3.4 mit $u = 1$ und $I = A$, also $\varphi(fg) = \varphi(f \cdot 1)\varphi(g) = \varphi(f)\varphi(g)$ für alle $f, g \in A$. □

Damit erhalten wir den Reellen Darstellungssatz für Semiringe, insbesondere also für Präordnungen [Schb, Thm.1.5.8].

3.6 Satz (Reeller Darstellungssatz)**.** *Sei $f \in A$. Ist $\varphi(f) > 0$ für alle $\varphi \in X(T)$, so ist $f \in T$.*

Beweis. Nach Korollar 3.5 ist jeder reine Zustand auf $(A, T, 1)$ ein Ringhomomorphismus $\varphi \in X(T)$. Damit sind die Voraussetzungen von Satz 2.6 erfüllt und es folgt sofort $f \in T$. □

Für den Polynomring $\mathbb{R}[\bar{X}] = \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ erhalten wir den Positivstellensatz von Schmüdgen für endlich erzeugte Präordnungen [Sch91].

3.7 Satz (Schmüdgen)**.** *Seien $f, h_1, \ldots, h_s \in \mathbb{R}[\bar{X}]$. Ist K_T beschränkt in $\mathbb{R}^n$ und $f > 0$ auf K_T, dann ist $f \in T = \mathrm{TP}(h_1, \ldots, h_s)$.*

Beweis. Die Präordnung T ist nach Satz 1.10 archimedisch. Es ist $f(x) > 0$ für alle $x \in K_T$, also ist $\varphi(f) > 0$ für alle $\varphi \in X(T)$ nach Bemerkung 1.17. Nach Korollar 3.5 ist damit $\varphi(f) > 0$ für alle $\varphi \in \partial_e S(\mathbb{R}[\bar{X}], T, 1)$ und damit ist $f \in T$ nach Satz 2.6. □

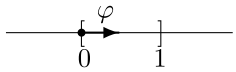
Außerdem ergibt sich mit Korollar 1.15 der folgende Satz von Handelman über konvexe Polytope [Han88].

3.8 Satz. *Enthalten $h_1, \ldots, h_s \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ lineare Polynome $h_1, \ldots, h_m$ mit $m \leq s$ derart, dass das konvexe Polyeder $K := \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_1(x) \geq 0, \ldots, h_m(x) \geq 0\}$ nichtleer und kompakt ist, dann gilt für $T := \mathrm{TS}(h_1, \ldots, h_s)$: Ist $f > 0$ auf K_T, so ist $f \in T$.*

Beweis. Nach Korollar 1.15 ist $T_1 := \mathrm{TS}(h_1, \ldots, h_m)$ archimedisch. Damit ist dann auch T als Oberring von T_1 archimedisch. Analog wie beim Satz von Schmüdgen 3.7 ist dann $\varphi(f) > 0$ für alle $\varphi \in \partial_e S(\mathbb{R}[\bar{X}], T, 1)$. Nach Satz 2.6 ist damit $f \in T$. □

Die reinen Zustände auf $(A, T, 1)$ sind alle multiplikativ. Dieses trifft für Zustände auf $(I, I \cap T, u)$ im Allgemeinen jedoch nicht mehr zu wie das folgende Beispiel zeigt.

3.9 Beispiel. Sei der Polynomring $\mathbb{R}[X]$ mit der Präordnung $T = \mathrm{TP}(X, 1-X)$ versehen. Dann ist $K_T = [0,1]$ kompakt und damit ist T nach Satz 1.10 archimedisch. Wir betrachten das Ideal $I = (X)$, dann ist $u := X$ nach Proposition 3.1 eine Ordnungseinheit von $((X), (X) \cap T)$. Die Abbildung φ definiert durch $\varphi(p) := \frac{\partial p}{\partial X}(0)$ für $p \in (X)$ ist ein reiner Zustand auf $((X), (X) \cap T, X)$, welcher nicht multiplikativ ist.



Beweis. Es ist klar, dass $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}((X), \mathbb{R})$ und $\varphi(X) = 1$ ist. Sei $p = \sum p_i X^i \in (X) \cap T$, also $p(x) \geq 0$ für alle $x \in K_T$. Da $p(x)$ also auch für $x \to 0$ von rechts nichtnegativ ist, muss der Koeffizient $p_1 \geq 0$ sein, also ist $\varphi(p) = p_1 \geq 0$ für $p \in (X) \cap T$. Damit ist φ ein Zustand auf $((X), (X) \cap T, X)$. Weiter gilt $\varphi(X^2) = 0 \neq 1 = \varphi(X)\varphi(X)$. Damit ist φ nicht multiplikativ.

In Satz 3.14 werden wir zeigen, dass $X(T) = \partial_e S(A, T, 1)$ gilt. Damit können wir zeigen, dass φ ein reiner Zustand auf $((X), (X) \cap T, X)$ ist.

Seien dazu $\varphi_1, \varphi_2 \in S((X), (X) \cap T, X)$ mit $\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$ gegeben. Sei $p \in (X)$, dann besitzt p eine Darstellung $p = fX$ für ein gewisses $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$. Weiter gilt $\varphi(fu) = f(0)$. Definiert man $\varphi^*(f) := \varphi(fu)$ und analog $\varphi_1^*(f) := \varphi_1(fu)$ und $\varphi_2^*(f) := \varphi_2(fu)$, so gilt $\varphi^*(f) = f(0)$ und aus $\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$ folgt, dass $\varphi^* = \frac{1}{2}(\varphi_1^* + \varphi_2^*)$. Damit ist $\varphi^* = \varphi_1^* = \varphi_2^*$, da der Zustand φ^* multiplikativ und somit nach Korollar 3.14 extremal ist. Damit gilt aber wegen $p = fX$ auch $\varphi(p) = \varphi_1(p) = \varphi_2(p)$ für alle $p \in I$. $\square$

Mit Satz 3.4 erhält man die folgende bekannte Charakterisierung der reinen Zustände auf einem Ideal $(I, I \cap T)$ mit Ordnungseinheit u [dAT01] oder [Han85].

3.10 Satz. *Sei I ein Ideal und u Ordnungseinheit von $(I, I \cap T)$, sei $\varphi \in \partial_e S(I, I \cap T, u)$. Dann existiert ein $\varphi^* \in X(T)$, so dass für alle $f \in A$ und $p \in I$ gilt*

$$\varphi(fp) = \varphi^*(f)\varphi(p).$$

Weiter gilt für φ entweder

(a) $\varphi = \frac{\varphi^*|_I}{\varphi(u^2)} = \varphi_u|_I$

oder

(b) $\varphi^*(I) = 0$ *und damit* $\varphi(I^2) = 0$.

Beweis. Wir definieren $\varphi^* : A \to \mathbb{R}$ durch $\varphi^*(f) := \varphi(fu)$. Wegen $Tu \subset T$ ist $\varphi^*(T) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$. Nach Satz 3.4 gilt $\varphi(fp) = \varphi^*(f)\varphi(p)$ für alle $f \in A$ und $p \in I$. Weiter gilt für $f, g \in A$

$$\varphi^*(fg) = \varphi((fg)u) = \varphi(f(gu)) = \varphi(fu)\varphi(gu) = \varphi^*(f)\varphi^*(g).$$

Somit ist φ^* multiplikativ. Da $\varphi^*(u) = \frac{\varphi(u^2)}{\varphi(u^2)} = 1$, ist $\varphi^* \in X(T)$. Für $p \in I$ gilt

$$\varphi^*(u)\varphi(p) = \varphi(up) = \varphi^*(p)\varphi(u) = \varphi^*(p).$$

Da $\varphi^*(u) = \varphi(u^2) \geq 0$, unterscheiden wir die folgenden zwei Fälle:

(a) $\varphi^*(u) > 0$. Dann ist $\varphi(p) = \frac{1}{\varphi(u^2)}\varphi^*(p) = \varphi_u(p)$ für alle $p \in I$.

(b) $\varphi^*(u) = 0$. Dann ist $\varphi^*(I) = 0$, also $\varphi(pq) = \varphi^*(p)\varphi(q) = 0$ für $p, q \in I$. $\square$

Aus dem Beweis erhalten wir das folgende Korollar.

3.11 Korollar. *Sei $\varphi \in S(I, I \cap T, u)$ mit $\varphi(fp) = \varphi(fu)\varphi(p)$ für alle $f \in A$ und $p \in I$. Definiert man φ^* durch $\varphi^*(f) := \varphi(fu)$ für $f \in A$, dann ist φ^* multiplikativ.*

Da wir mit Korollar 3.5 wissen, dass reine Zustände auf $(A, T, 1)$ multiplikativ sind, folgt $\varphi(f^2) = \varphi(f)^2 \geq 0$ für alle $\varphi \in \partial_e S(A, T, 1)$. Mit Korollar 1.8 aus dem Satz von Krein-Milman folgt weiter (vgl. Beweis von 2.6), dass schon alle Zustände $\varphi \in S(A, T, 1)$ Quadrate in A ins Nichtnegative abbilden, obwohl $A^2 \subset T$ nicht explizit von T verlangt wird wie im Fall einer Präordnung.

Im Gegensatz zu den reinen Zuständen auf $(A, T, 1)$ sind reine Zustände auf $(I, I \cap T, u)$ jedoch für $\varphi(u^2) \neq 1$ nicht multiplikativ. Als Korollar aus Satz 3.10 erhalten wir aber, dass auch alle Zustände auf $(I, I \cap T, u)$ Quadrate in I ins Nichtnegative abbilden.

3.12 Korollar. *Sei I ein Ideal mit Ordnungseinheit u auf $(I, I \cap T)$. Dann gilt für alle $\varphi \in S(I, I \cap T, u)$, dass $\varphi(p^2) \geq 0$ für alle $p \in I$.*

Beweis. Sei zunächst $\varphi \in \partial_e S(I, I \cap T, u)$. Wir betrachten φ^* zu φ und unterscheiden die zwei Fälle aus Satz 3.10. Sei $p \in I$, dann gilt

(a) $\varphi(p^2) = \frac{1}{\varphi^*(u)}\varphi^*(p^2) = \frac{1}{\varphi^*(u)}\varphi^*(p)^2 \geq 0.$

(b) $\varphi(p^2) = 0$, da $\varphi(I^2) = 0$.

Damit gilt mit Korollar 1.8, dass $\varphi(p^2) \geq 0$ für alle Zustände $\varphi \in S(I, I \cap T, u)$. □

Man stellt sich nun die Frage, ob in Satz 3.10 auch die Umkehrung gilt. Sind also alle Zustände auf $(I, I \cap T, u)$, welche $\varphi(fp) = \varphi(fu)\varphi(p)$ für alle $f \in A$ und $p \in I$ erfüllen, schon reine Zustände auf $(I, I \cap T, u)$? Wir können zeigen, dass Zustände φ auf $(I, I \cap T, u)$ vom Fall (a) mit $\varphi(fp) = \varphi(fu)\varphi(p)$ schon reine Zustände auf $(I, I \cap T, u)$ sind. Für Zustände vom Fall (b) gilt die Umkehrung nicht, da jede echte Konvexkombination $\varphi = \alpha\varphi_1 + (1 - \alpha)\varphi_2$ von reinen Zuständen $\varphi_1, \varphi_2 \in S(I, I \cap T, u)$ vom Typ (b) mit $\varphi_1, \varphi_2 \neq \varphi$ wieder einen Zustand auf $(I, I \cap T, u)$ bildet mit $\varphi(I^2) = 0$ und $\varphi(fp) = \varphi(fu)\varphi(p)$. Dieser ist dann aber nicht rein.

Wir benötigen für den Beweis der ersten Aussage noch zwei Ungleichungen für Zustände auf einem Ideal I mit Ordnungseinheit u von $(I, I \cap T)$. Diese finden sich für Funktionale formuliert in [BLP66] und wurden hier auf Zustände übertragen.

3.13 Lemma. *Sei I ein Ideal von A mit Ordnungseinheit u von $(I, I \cap T)$. Dann gelten für alle $\varphi \in S(I, I \cap T, u)$ die folgenden Ungleichungen*

i) $\varphi(pq)^2 \leq \varphi(p^2)\varphi(q^2)$ *für alle* $p, q \in I$

ii) $\varphi(p^2)^2 \leq \varphi(p)\varphi(p^3)$ *für alle* $p \in I$ *mit* $\varphi(p) \geq 0$.

Beweis. i) Sei $\varphi \in S(I, I \cap T, u)$ fest gewählt und $p, q \in I$. Dann gilt nach Korollar 3.12 für alle $\lambda \in \mathbb{Q}$:

$$0 \leq \varphi((p + \lambda q)^2) = \varphi(p^2) + 2\varphi(pq)\lambda + \varphi(q^2)\lambda^2.$$

Damit dies für alle $\lambda \in \mathbb{Q}$ gilt, kann die quadratische Gleichung in λ höchstens eine reelle Nullstelle besitzen. Damit muss die Diskriminante nichtpositiv (also ≤ 0) sein, d.h. $(2\varphi(pq))^2 - 4\varphi(p^2)\varphi(q^2) \leq 0$, also $\varphi(pq)^2 \leq \varphi(p^2)\varphi(q^2)$.

ii) Sei $p \in I$ mit $\varphi(p) \geq 0$, dann gilt für alle $\lambda \in \mathbb{Q}$:

$$\varphi(p(p+\lambda)^2) = \varphi^*((p+\lambda)^2)\varphi(p) = \varphi^*(p+\lambda)^2\varphi(p) \geq 0$$

und damit

$$0 \leq \varphi(p(p+\lambda)^2) = \varphi(p^3) + 2\varphi(p^2)\lambda + \varphi(p)\lambda^2.$$

Auch hier muss die Diskriminante ≤ 0 sein, also $4\varphi(p^2)^2 - 4\varphi(p^3)\varphi(p) \leq 0$. □

Die erste Ungleichung ist eine Art Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für Zustände. Hiermit können wir sofort zeigen, dass alle multiplikativen Zustände auf $(A, T, 1)$ schon reine Zustände sind. Wir erhalten also die Umkehrung von Korollar 3.5.

3.14 Satz. *Jeder multiplikative Zustand $\varphi \in S(A, T, 1)$ ist rein.*

Beweis. Seien $\varphi_1, \varphi_2 \in S(A, T, 1)$ mit $\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$ gegeben. Zu zeigen ist dann, dass $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$. Sei $f \in A$, dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \big(\varphi_1(f) - \varphi_2(f)\big)^2 = \varphi_1(f)^2 - 2\varphi_1(f)\varphi_2(f) + \varphi_2(f)^2 \\ &= 2(\varphi_1(f)^2 + \varphi_2(f)^2) - (\varphi_1(f) + \varphi_2(f))^2 \\ &\leq 2(\varphi_1(f^2) + \varphi_2(f^2)) - (\varphi_1(f) + \varphi_2(f))^2 \quad \text{nach Lemma 3.13 } i\text{), da } 1 \in A. \\ &= 4\varphi(f^2) - 4\varphi(f)^2 = 0, \quad \text{da } \varphi \text{ multiplikativ ist.} \end{aligned}$$

□

Es gilt also $\partial_e S(A, T, 1) = X(T)$. Somit sind die reinen Zustände auf $(A, T, 1)$ gegeben durch die Ringhomomorphismen $\varphi \in X(T)$.

Im Polynomring $\mathbb{R}[\bar{X}]$ sind die reinen Zustände auf $(\mathbb{R}[\bar{X}], T, 1)$ durch alle Einsetzungen ε_x mit $x \in K_T$ gegeben. Damit gilt auch hier $\varphi(f) \geq 0$ für alle $\varphi \in S(\mathbb{R}[\bar{X}], T, 1)$ genau dann, wenn $f \geq 0$ auf K_T ist.

Kommen wir nun zur Umkehrung von Satz 3.10(a). Dabei ist auch hier eine entsprechende Formulierung für multiplikative Funktionale in [BLP66, Thm.13] zu finden. Die Beweisidee wurde hierbei übernommen, jedoch in einen allgemeineren Kontext übertragen.

3.15 Satz. *Sei I ein Ideal von A und u Ordnungseinheit von $(I, I \cap T)$, sei $\varphi \in S(I, I \cap T, u)$ mit $\varphi(fp) = \varphi(fu)\varphi(p)$ für alle $f \in A$ und $p \in I$, weiter sei $\varphi(u^2) \neq 0$. Dann ist φ ein reiner Zustand auf $(I, I \cap T, u)$.*

Um den Beweis übersichtlicher zu gestalten, benötigen wir noch die beiden folgenden einfachen Propositionen.

3.16 Proposition. *Es gilt für $\alpha, \beta \in [0, 1]$ die Ungleichung $\sqrt{\alpha\beta} + \sqrt{(1-\alpha)(1-\beta)} \leq 1$, wobei die Gleichheit nur für $\alpha = \beta$ gegeben ist.*

Beweis. Es gilt $0 \leq (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2$. Erweitert man diese Ungleichung auf beiden Seiten mit $1 + \alpha\beta$, so erhält man folgende Äquivalenz

$$\begin{aligned} 0 \leq &(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2 \Leftrightarrow \\ &(1-\alpha)(1-\beta) = 1 + \alpha\beta - \alpha - \beta \leq 1 + \alpha\beta - 2\sqrt{\alpha\beta} = (1 - \sqrt{\alpha\beta})^2 \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

3.17 Proposition. *Sei $\varphi \in S(I, I \cap T, u)$ mit $\varphi(fp) = \varphi(fu)\varphi(p)$ für alle $f \in A$ und $p \in I$, weiter sei $\varphi(u^2) \neq 0$. Dann ist für $p \in I$ mit $\varphi(p) > 0$ auch $\varphi(p^2) > 0$ und $\varphi(p^3) > 0$.*

Beweis. Es gilt $\varphi(pu) = \varphi(u^2)\varphi(p)$ für $p \in I$. Damit folgt

$$\varphi(p^2) = \varphi(pu)\varphi(p) = \varphi(u^2)\varphi(p)^2$$

und analog

$$\varphi(p^3) = \varphi(pu)\varphi(p^2) = \varphi(u^2)^2\varphi(p)^3.$$

Da $\varphi(u^2) > 0$ und $\varphi(p) > 0$ gilt, sind damit $\varphi(p^2) > 0$ und $\varphi(p^3) > 0$. □

Beweis (Satz 3.15). Wir betrachten zunächst den Fall, dass $\mathbb{R} \subset A$ gilt.

Angenommen, es gibt eine Darstellung $\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$ mit $\varphi_1, \varphi_2 \in S(I, I \cap T, u)$. Dann ist zu zeigen, dass $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$. Da $(I \cap T) - (I \cap T) = I$, genügt es, $\varphi(p) = \varphi_1(p) = \varphi_2(p)$ für $p \in I \cap T$ zu zeigen.

Ist $\varphi(p) = 0$, folgt aus $\varphi(p) = \frac{1}{2}(\varphi_1(p)+\varphi_2(p))$ und $\varphi_1(p), \varphi_2(p) \geq 0$, dass $\varphi_1(p) = \varphi_2(p) = 0$. Sei also $\varphi(p) > 0$. Wir zeigen $\frac{\varphi_1(p)}{\varphi(p)} = 1$ für alle $p \in I \cap T$. Damit folgt dann auch $\frac{\varphi_2(p)}{\varphi(p)} = 1$. Setze dazu

$$\alpha := \frac{1}{2}\frac{\varphi_1(p)}{\varphi(p)} \text{ und } \beta := \frac{1}{2}\frac{\varphi_1(p^3)}{\varphi(p^3)}.$$

Da nach Voraussetzung $\varphi(p) > 0$ und nach Proposition 3.17 $\varphi(p^3) > 0$ gilt, sind α und β wohldefiniert. Weiter gilt mit $\frac{1}{2}\varphi_2(p) = \varphi(p) - \frac{1}{2}\varphi_1(p)$, dass

$$\frac{1}{2}\frac{\varphi_2(p)}{\varphi(p)} = 1 - \alpha \text{ und analog } \frac{1}{2}\frac{\varphi_2(p^3)}{\varphi(p^3)} = 1 - \beta.$$

Mit $p \in I \cap T$ ist auch $p^3 \in I \cap T$, da T multiplikativ ist. Damit sind $\alpha, \beta \in [0,1]$, da beispielsweise $1 = \frac{1}{2}\frac{\varphi_1(p)}{\varphi(p)} + \frac{1}{2}\frac{\varphi_2(p)}{\varphi(p)} = \alpha + (1-\alpha)$ mit $\alpha \geq 0$.

Wendet man nun Lemma 3.13 ii) auf beide Summanden in $\varphi(p^2) = \frac{1}{2}(\varphi_1(p^2) + \varphi_2(p^2))$ an, so folgt, da $\varphi(p^2) > 0$ nach Proposition 3.17 ist, dass

$$1 = \frac{1}{2}\frac{\varphi_1(p^2)}{\varphi(p^2)} + \frac{1}{2}\frac{\varphi_2(p^2)}{\varphi(p^2)} \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\varphi_1(p^3)\varphi_1(p)}{\varphi(p^2)^2}} + \sqrt{\frac{\varphi_2(p^3)\varphi_2(p)}{\varphi(p^2)^2}}\right). \tag{1}$$

Definiert man $\varphi^*(q) := \varphi(qu)$, so ist φ^* nach Korollar 3.11 multiplikativ und für $f \in A$ und $q \in I$ gilt

$$\varphi(fq) = \varphi^*(f)\varphi(q) \quad \text{und damit} \quad \varphi(qu) = \varphi^*(q) = \varphi(q)\varphi^*(u). \tag{2}$$

Wegen $\varphi(u^2) = \varphi^*(u) \neq 0$ folgt

$$\varphi(p^2)^2 \overset{(2)}{=} \frac{\varphi^*(p^2)}{\varphi^*(u)}\varphi(p^2) \overset{(2)}{=} \frac{\varphi^*(p^2)\varphi^*(p)}{\varphi^*(u)}\varphi(p) \overset{3.11}{=} \frac{\varphi^*(p^3)}{\varphi^*(u)}\varphi(p) \overset{(2)}{=} \varphi(p^3)\varphi(p)$$

und damit ist nach (1) und Proposition 3.16

$$1 \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\varphi_1(p^3)\varphi_1(p)}{\varphi(p^3)\varphi(p)}} + \sqrt{\frac{\varphi_2(p^3)\varphi_2(p)}{\varphi(p^3)\varphi(p)}}\right) = \sqrt{\alpha\beta} + \sqrt{(1-\alpha)(1-\beta)} \leq 1.$$

Also gilt $\alpha = \beta$ und damit $\varphi_1(p)\varphi(p^3) = \varphi_1(p^3)\varphi(p)$. Mit $\varphi(p^3) = \varphi^*(p^2)\varphi(p)$ folgt

$$\varphi_1(p)\varphi^*(p^2) = \varphi_1(p^3). \tag{3}$$

Somit gilt in Lemma 3.13 *ii)* ebenfalls die Gleichheit, denn gilt für einen der Summanden $\varphi_1(p^2)$ oder $\varphi_2(p^2)$ die strikte Ungleichung in Lemma 3.13 *ii)*, so gilt diese auch in (1), da $\varphi_1(p^2) \geq 0$ und $\varphi_2(p^2) \geq 0$ sind nach Korollar 3.12. Daraus folgt der Widerspruch $1 < 1$.

Damit gilt

$$\varphi_1(p^2)^2 \overset{3.13ii)}{=} \varphi_1(p)\varphi_1(p^3) \overset{(3)}{=} \varphi_1(p)^2\varphi^*(p^2) = \varphi_1(p)^2\varphi^*(p)^2 \overset{(2)}{=} \varphi_1(p)^2\varphi^*(u)^2\varphi(p)^2,$$

also

$$\varphi_1(p^2) = \varphi^*(u)\varphi_1(p)\varphi(p). \tag{4}$$

Sei nun $q \in I \cap T$ mit $\varphi(q) = \varphi(p) > 0$. Dann ist $\varphi((p-q)^2) = \varphi^*(u)\varphi(p-q)^2{=}0$. Nach Lemma 3.12 gilt wieder $\varphi_1((p-q)^2), \varphi_2((p-q)^2) \geq 0$. Damit folgt dann aus $\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$, dass $\varphi((p-q)^2) = \varphi_1((p-q)^2) = 0$. Hiermit erhält man

$$0 \leq \varphi_1(pq - q^2)^2 = \varphi_1((p-q)q)^2 \overset{3.13i)}{\leq} \varphi_1((p-q)^2)\varphi_1(q^2) = 0,$$

also $\varphi_1(pq - q^2) = 0$. Aus der Linearität von φ_1 und (4) folgt damit

$$\varphi_1(pq) = \varphi_1(q^2) \overset{(4)}{=} \varphi^*(u)\varphi_1(q)\varphi(q).$$

Durch Vertauschen der Rollen von p und q folgt, da mit $\varphi(p) \neq 0$ auch $\varphi(q) \neq 0$ ist, dass

$$\frac{\varphi_1(p)}{\varphi(p)} = \frac{\varphi_1(pq)}{\varphi^*(u)\varphi(p)^2} = \frac{\varphi_1(pq)}{\varphi^*(u)\varphi(q)^2} = \frac{\varphi_1(q)}{\varphi(q)}.$$

Da φ und φ_1 nach Bemerkung 2.5 $\mathbb{R}$-linear sind, gilt die Gleichheit der beiden äußeren Terme sogar für alle $p, q \in I \cap T$ mit $\varphi(p) \neq 0$ und $\varphi(q) \neq 0$ (betrachte $q' := \frac{\varphi(p)}{\varphi(q)}q$ für $\varphi(q) \neq 0$) und damit ist $\varphi_1 = \frac{\varphi_1(u)}{\varphi(u)}\varphi = \varphi$.

Ist $\mathbb{R} \not\subset A$ erhält man die Behauptung durch Tensorieren. Wie in Bemerkung 1.19 betrachten wir $A' := \mathbb{R} \otimes A$ mit Semiring $T' := \sum \mathbb{R}_{\geq 0} \otimes T$ sowie das Ideal $I' := \mathbb{R} \otimes I$ mit der Ordnungseinheit $u' := 1 \otimes u$ von $(I', I' \cap T')$. Dann sind mit $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in S(I, I \cap T, u)$ die Abbildungen $1 \otimes \varphi$ sowie $1 \otimes \varphi_1$ und $1 \otimes \varphi_2$ $\mathbb{R}$-lineare Zustände auf $(I', I' \cap T', u')$. Jedes $f' \in A'$ und $p' \in I'$ können wir nach Konstruktion darstellen durch $f' = r_f \otimes f$ beziehungsweise $r_p \otimes p$ für gewisse $r_f, r_p \in \mathbb{R}$, $f \in A$ und $p \in I$. Hierfür gilt $f'p' = r_f r_p \otimes fp$ und damit gilt nach Voraussetzung $(1 \otimes \varphi)(f'p') = (1 \otimes \varphi)(f'u')(1 \otimes \varphi)(p')$ für $f' \in A'$ und $p' \in I'$. Somit können wir auf den Fall $\mathbb{R} \subset A$ zurückgreifen und erhalten $1 \otimes \varphi = 1 \otimes \varphi_1 = 1 \otimes \varphi_2$. Mit Bemerkung 1.19 folgt dann aber schon $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$ und damit die Behauptung. □

Wir können Satz 3.14 aus obigem Satz 3.15 ableiten, da multiplikative Zustände auf $(A, T, 1)$ die Voraussetzungen erfüllen.

Insbesondere haben wir gezeigt, dass alle Einschränkungen von reinen Zuständen $\psi \in \partial_e S(A, T, 1)$, welche $\psi(u) \neq 0$ für die Ordnungseinheit u auf $(I, I \cap T)$ erfüllen, einen reinen Zustand φ auf $(I, I \cap T, u)$ vom Typ (a) durch $\varphi(p) = \frac{1}{\psi(u)}\psi(p)$ für $p \in I$ induzieren. Denn es gilt $\varphi(fp) = \frac{\psi(fp)}{\psi(u)} = \frac{\psi(f)\psi(p)}{\psi(u)} = \psi(f)\varphi(p)$. Damit gilt auch $\varphi(pu) = \psi(p)$, also $\psi = \varphi^*$. Somit sind im Polynomring $\mathbb{R}[\bar{X}]$ mit endlich erzeugtem archimedischen Semiring T die reinen Zustände auf $(I, I \cap T, u)$ vom Typ (a) genau durch alle „normierten" Einsetzungen von $x \in K_T$ mit $u(x) \neq 0$ gegeben. Die reinen Zustände vom Typ (b) werden im vierten Kapitel für verschiedene Ideale im Polynomring $\mathbb{R}[\bar{X}]$ weiter untersucht.

3.18 Bemerkung. Kommen wir noch einmal zu den Beispielen 2.4 zurück. Wir haben die Abbildung $\varphi : f \mapsto \int f d\mu$ auf $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ mit punktweiser Ordnung sowie die Abbildung $\psi : f \mapsto f(a)$ für festes $a \in K_T$ auf $\mathbb{R}[X]$ mit archimedischer Präordnung T betrachtet.

Es ist klar, dass φ und ψ nach Konstruktion Zustände sind. Da der Zustand φ im Allgemeinen nicht multiplikativ ist, kann er kein reiner Zustand auf $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ sein. Wir wissen, dass die reinen Zustände auf $(\mathbb{R}[X], T, 1)$ genau die multiplikativen Homomorphismen $\varphi \in X(T)$ also Einsetzungen eines Punktes aus K_T sind. Damit ist ψ sogar ein reiner Zustand auf $(\mathbb{R}[X], T, 1)$.

Mit Satz 3.10 können wir einen weiteren Darstellungssatz zeigen, welcher anstelle der Positivität eines Elementes $f \in A$ die Nichtnegativität bezüglich $X(T)$ fordert. Da dieses keine hinreichende Bedingung für $f \in T$ ist, wie das folgende Beispiel zeigt, muss eine zusätzliche Forderung an f gestellt werden.

3.19 Beispiel. Es sei $h = (1 - X^2)^3 \in \mathbb{R}[X]$ und $T = \mathrm{TP}(h)$ die durch h erzeugte Präordnung. Dann ist $K_T = [-1, 1]$ kompakt und damit ist T nach Satz 1.10 archimedisch. Weiter ist $f = 1 - X^2$ nichtnegativ auf K_T. Es ist aber $f \notin T$, denn:

Sei angenommen, dass $f \in T$. Dann existiert eine Darstellung $f = \sigma_1 + h\sigma_2$ mit $\sigma_1, \sigma_2 \in \sum \mathbb{R}[X]^2$. Da $f(\pm 1) = \sigma_1(\pm 1) = 0$, ist f ein Teiler von σ_1. Da σ_1 eine Quadratsumme $\sigma_1 = \sum g_i^2$ mit $g_i(\pm 1) = 0$ ist, ist sogar $f^2 = (1 - X^2)^2$ ein Teiler von σ_1 und damit von f, Widerspruch.

Wir bezeichnen mit $X(T) \cap \{f = 0\}$ die Menge der Ringhomomorphismen $\varphi \in X(T)$, für die $\varphi(f) = 0$ gilt. Mit $A^\times$ bezeichnen wir die Menge der Einheiten in A. Damit können wir den folgenden Darstellungssatz formulieren.

3.20 Satz. *Sei $f \in A$. Ist $\varphi(f) \geq 0$ für alle $\varphi \in X(T)$ und existiert eine Darstellung*

$$f = g_1 t_1 + \cdots + g_s t_s \tag{5}$$

mit $t_i \in T$ und $g_i \in A$, so dass $\psi(g_i) > 0$ für jedes $\psi \in X(T) \cap \{f = 0\}$ gilt, dann ist $f \in T$.

Beweis. Sei $I = (t_1, \ldots, t_s)$ das von endlich vielen t_i erzeugte Ideal, dann ist $f \in I$ und $u := t_1 + \cdots + t_s$ nach Proposition 3.1 eine Ordnungseinheit von $(I, I \cap T)$. Sei $\varphi \in \partial_e S(I, I \cap T, u)$. Wir zeigen $\varphi(f) > 0$, dann folgt mit Satz 2.6, dass $f \in T$ ist.

Dazu betrachten $\varphi^* \in X(T)$ zu φ und unterscheiden wieder zwei Fälle gemäß Satz 3.10:

(a) $\varphi^*(u) > 0$, also $\varphi(p) = \frac{\varphi^*(p)}{\varphi^*(u)}$ für $p \in I$. Da $\varphi^* \in X(T)$ ist, ist damit nach Voraussetzung $\varphi(f) = \frac{1}{\varphi^*(u)}\varphi^*(f) \geq 0$. Angenommen, $\varphi(f) = 0$. Damit ist dann auch $\varphi^*(f) = 0$, also ist $\varphi^* \in X(T) \cap \{f = 0\}$ und es gilt

$$0 = \varphi(f) = (\underbrace{\varphi^*(g_1)}_{>0}\underbrace{\varphi(t_1)}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{\varphi^*(g_s)}_{>0}\underbrace{\varphi(t_s)}_{\geq 0}),$$

das heißt für alle $i \in \{1, \ldots, s\}$ gilt $\varphi(t_i) = 0$. Damit ist aber $\varphi(t_1 + \cdots + t_s) = \varphi(u) = 0 \neq 1$, Widerspruch. Somit ist $\varphi(f) > 0$.

(b) $\varphi^*(u) = 0$. Dann ist $\varphi^*(I) = 0$, also $\varphi^*(f) = 0$ und somit ist wieder $\varphi^*(g_i) > 0$ für alle $i = 1, \ldots, s$. Da $\varphi(u) = \varphi(t_1 + \cdots + t_s) = 1 > 0$, muss $\varphi(t_i) \neq 0$ für mindestens ein i gelten. Damit folgt $\varphi(f) = \varphi^*(g_1)\varphi(t_1) + \cdots + \varphi^*(g_s)\varphi(t_s) > 0$. □

Die Identität $f = 1 \cdot f$ für $f \in T$ liefert uns eine formale Umkehrung der Aussage, so dass $f \in T$ genau dann gilt, wenn $f \geq 0$ bezüglich $X(T)$ ist und f eine Darstellung (5) besitzt.

Aus der Identität $f = f \cdot 1$ erhält man den Reellen Darstellungssatz 3.6. Ist T eine Präordnung, so erhält man für eine Darstellung (5) der Gestalt $f = g_1 \cdot 1 + g_2 t$ Theorem 3.10 von Scheiderer in [Sch03], wofür Kuhlmann, Marshall und Schwartz in [KMS, Cor.2.5] einen weiteren Beweis liefern. In [Mar, Lem.3.2] findet sich eine Verallgemeinerung des Basislemmas [KMS, Lem.2.1] für den Beweis aus [KMS, Cor.2.5], so dass sich damit die vereinfachte Darstellung $f = g_1 + g_2 t$ auf $f = g_1 t_1 + \cdots + g_s t_s$ erweitern lässt.

Weiter erhält man aus Satz 3.20 für den Polynomring $\mathbb{R}[\bar{X}]$ Theorem 1 aus [Schc].

Ein Beispiel für die Anwendung von Satz 3.20 liefert das Motzkin-Polynom in zwei Unbestimmten. Man kann hier eine konkrete Darstellung wie in Satz 3.20 gefordert angeben [Schc].

3.21 Beispiel. Sei T der von den Polynomen $h_1 = 1 - X, h_2 = 1 + X, h_3 = 1 - Y$ und $h_4 = 1 + Y$ im Polynomring $\mathbb{R}[X, Y]$ erzeugte Semiring. Dann ist $K_T = [-1, 1] \times [-1, 1]$, also kompakt und damit ist T nach Korollar 1.15 archimedisch.

Das Motzkin-Polynom $f = X^4Y^2 + X^2Y^4 - 3X^2Y^2 + 1$ ist nichtnegativ auf K_T und besitzt die vier Nullstellen $(\pm 1, \pm 1)$. Weiter besitzt f die Darstellung

$$f = Y^2 h_1^2 h_2^2 + X^2 h_3^2 h_4^2 + h_1 h_2 h_3 h_4,$$

welche obigem Satz genügt, da $1, X^2, Y^2 > 0$ in $(\pm 1, \pm 1)$. Damit muss also $f \in T$ gelten. Tatsächlich findet man die folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} f = &\frac{1}{8}(h_1^3 h_3^2 h_4^2 + h_1^2 h_2^2 h_3^3 + h_1^2 h_2^2 h_4^3 + h_2^3 h_3^2 h_4^2 + h_1^3 h_2 h_3 h_4) \\ &+ \frac{1}{16}(h_1^2 h_2 h_3^3 h_4 + h_1 h_2^3 h_3^2 h_4 + h_1 h_2^3 h_3 h_4^2 + h_1 h_2^2 h_3^3 h_4 + h_1 h_2 h_3^2 h_4^3 + h_1 h_2 h_3 h_4^4). \end{aligned}$$

In Satz 3.20 wurde von den $g_i \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ nur $\varphi(g_i) > 0$ in $X(T) \cap \{f = 0\}$ gefordert. Außerhalb dieser Menge kann g_i jeden beliebigen Wert annehmen. Betrachtet man mit $\lambda \in \mathbb{R}$ für das Motzkinpolynom die allgemeinere Darstellung

$$f = ((1 - \lambda)Y^2 + \lambda)h_1^2 h_2^2 + ((1 - \lambda)X^2 + \lambda)h_3^2 h_4^2 + (\lambda X^2 + \lambda Y^2 + 1 - 2\lambda)h_1 h_2 h_3 h_4,$$

welche für $\lambda = 0$ obige Darstellung liefert, so sieht man, dass auch hier $g_1(\pm 1, \pm 1) = g_2(\pm 1, \pm 1) = g_3(\pm 1, \pm 1) = 1 > 0$ gilt. Weiter ist beispielsweise $g_1(0, 0) = \lambda$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig, insbesondere können die g_i also auch negative Werte annehmen.

3.2 Archimedische Moduln höherer Stufe

Hier werden die Sätze aus Abschnitt 3.1 für Moduln höherer Stufe formuliert und bewiesen. Dabei gehen viele Beweisschritte analog. Die wesentliche Arbeit besteht in einem neuen Beweis von Satz 3.4, da hier die Eigenschaft $T \cdot T \subset T$ benutzt wurde. Es zeigt sich, dass die Aussagen für Ringe mit Semiringen T aus dem letzten Abschnitt auf Ringe mit Moduln M höherer Stufe übertragen werden können, sofern $uM \subset M$ für die Ordnungseinheit u von (A, M, u) gilt. Desweiteren erhalten wir einen Darstellungssatz für T-Moduln höherer Stufe.
Wir fordern in diesem Abschnitt die folgende **Generalvoraussetzung**:

Sei A ein kommutativer Ring mit $\mathbb{Q} \subset A$ und $M \subset$ ein Modul höherer Stufe mit $\mathbb{Q}_{\geq 0} \cdot M \subset M$. Dann bildet M einen konvexen Kegel im $\mathbb{Q}$-Vektorraum A mit $A^m M \subset M$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Weiter sei M stets archimedisch, um zu gewährleisten, dass A die Ordnungseinheit $u = 1$ besitzt.

Wählen wir die Ordnungseinheit u auf $(I, I \cap M)$ so, dass $uM \subset M$ ist, dann gilt der wichtige Satz 3.4 auch für Moduln höherer Stufe. Deshalb fordern wir zusätzlich

Zu einem Ideal $I \subset A$ sei u eine Ordnungseinheit von $(I, I \cap M)$ mit $uM \subset M$.

Beginnen wir mit dem folgenden wichtigen Satz, welcher Satz 3.4 aus dem letzen Abschnitt entspricht. Dabei überträgt sich die Dfinition 3.3 der Lokalisierung eines Zustands in natürlicher Weise auf Zustände $\varphi \in S(I, I \cap M, u))$.

3.22 Satz. *Sei $\varphi \in \partial_e S(I, I \cap M, u)$. Dann gilt für alle $f \in A$ und $p \in I$*

$$\varphi(fp) = \varphi(fu)\varphi(p).$$

Für den Beweis benötigen wir noch die folgende Proposition.

3.23 Proposition. *Sei $\lambda_k := \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j \leq N}} \binom{1/2}{i}\binom{1/2}{j}(-1)^k$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $\lambda_k \geq 0$ für $k \geq 2$.*

Beweis. Es ist klar, dass $\lambda_k = 0$ ist für $k > 2N$, da dann die Summe leer ist.
Für $2 \leq k \leq N$ erhält man durch einen Koeffizientenvergleich mit der formalen Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i+j=k} \binom{1/2}{i}\binom{1/2}{j}(-1)^k X^k = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \binom{1/2}{i}(-1)^i X^i\right)^2 = 1 - X$, dass $\lambda_k = 0$ ist.
Für $N < k \leq 2N$ ist jeder Summand von λ_k und damit λ_k selbst nichtnegativ, da die Anzahl der negativen Faktoren in $\binom{1/2}{i}\binom{1/2}{j}(-1)^k$ mit $i + j = k$ und $i + j \leq N$ dann stets gerade ist. □

Beweis (Satz 3.22). Sei $f \in A$, dann gilt $f^m M \subset M$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Da M archimedisch ist, gilt $M - M = A$. Indem wir für $L \in \mathbb{N}$ mit $f^m \leq_M L$ gegebenenfalls $\frac{f^m}{2L}$ statt f^m betrachten, erhalten wir durch geeignete Skalierung $0 \leq_M f^m \leq_M \frac{1}{2}$. Hierfür zeigen wir $\varphi(f^m p) = \varphi(f^m u)\varphi(p)$ für alle $p \in I$. Dann folgt wegen $\mathbb{Q} \subset A$ mit der Relation

$$m!\, f = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} (-1)^{m-1-i} [(f+i)^m - i^m]$$

aus Lemma 1.9 die Behauptung durch

$$\begin{aligned}
m!\,\varphi(fp) &= \varphi\Big(\Big[\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m-1}{i}(-1)^{m-1-i}[(f+i)^m - i^m]\Big]p\Big)\\
&= \varphi\Big(\Big[\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m-1}{i}(-1)^{m-1-i}(f+i)^m\Big]u\Big)\varphi(p)-\\
&\qquad\qquad - \varphi\Big(\Big[\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m-1}{i}(-1)^{m-1-i}\,i^m\Big]u\Big)\varphi(p)\\
&= m!\,\varphi(fu)\varphi(p).
\end{aligned}$$

Wir benötigen zunächst noch das folgende Lemma.

3.24 Lemma. *Für $f \in A$ mit $0 \leq_M f^m \leq_M \frac{1}{2}$ gilt für alle $p \in I \cap M$, dass $\varphi((1-f^m)p) \geq 0$.*

Beweis. Sei $p \in I \cap M$ ohne Einschränkung so, dass $p \leq_M u$ gilt. Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist dann

$$0 \leq_M f^{mk}p \leq_M \frac{1}{2^k}u$$

nach folgender Induktion: Für den Induktionsanfang beachte, dass $0 \leq_M f^m p \leq_M f^m u \leq_M \frac{1}{2}u$, da $f^m M \subset M$ ist. Sei nun die Behauptung für k als richtig vorausgesetzt. Dann erhält man sie für $k+1$ durch $0 \leq_M f^{m(k+1)}p = f^m(f^{mk}p) \leq_M f^m \frac{1}{2^k}u \leq_M \frac{1}{2}\frac{1}{2^k}u = \frac{1}{2^{k+1}}u$.

Sei $\varepsilon > 0$, wir zeigen $\varphi((1-f^m)p) > -\varepsilon$. Sei dazu $N \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass

$$\Big[\sum_{k=0}^{N}\binom{1/2}{k}(-1)^k\frac{1}{2^k}\Big]^2 - \frac{1}{2} = \sum_{k=2}^{2N}\underbrace{\Big(\sum_{\substack{i+j=k\\ i,j\leq N}}\binom{1/2}{i}\binom{1/2}{j}(-1)^k\Big)}_{=\lambda_k}\frac{1}{2^k} < \varepsilon.$$

Dieses N existiert, da $\Big[\sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}(-1)^k\frac{1}{2^k}\Big]^2 = \frac{1}{2}$ (Binomialreihe) [Wal99, S.103]. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\varphi\Big(\Big(\Big[\sum_{k=0}^{N}\binom{1/2}{k}(-1)^k f^{mk}\Big]^2 - [1-f^m]\Big)p\Big)\\
&\quad= \varphi\Big(\Big(\sum_{k=2}^{2N}\Big(\sum_{\substack{i+j=k\\ i,j\leq N}}\binom{1/2}{i}\binom{1/2}{j}(-1)^k\Big)f^{mk}\Big)p\Big) = \sum_{k=2}^{2N}\lambda_k\varphi\Big(f^{mk}p\Big)\\
&\quad\leq \sum_{k=2}^{2N}\lambda_k\varphi\Big(\frac{1}{2^k}u\Big) = \sum_{k=2}^{2N}\lambda_k\frac{1}{2^k} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

da $\lambda_k \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ nach Proposition 3.23. Damit folgt dann

$$0 \leq \varphi\Bigg(\Big(\Big[\sum_{k=0}^{N}\binom{1/2}{k}(-1)^k f^{2mk}\Big]^2\Big)p\Bigg) < \varepsilon + \varphi((1-f^{2m})p),$$

also $\varphi((1-f^m)p) > -\varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist $\varphi((1-f^m)p) \geq 0$. □

Damit haben wir gezeigt, dass die Lokalisierung φ_{1-f^m} gemäß Definition 3.3 auf $(I, I \cap M, u)$ einen Zustand bildet. Der Rest des Beweises verläuft analog zu Satz 3.4.

Es gilt $0 \leq \varphi(f^m u) \leq \frac{1}{2}$, da $uM \subset M$. Zu $p \in I \cap M$ ein $L \in \mathbb{N}$ mit $p \leq_M Lu$. Damit gilt für $\varphi(f^m u) = 0$, dass

$$0 \leq \varphi(f^m p) \leq \varphi(f^m Lu) = L\varphi(f^m u) = 0.$$

Insbesondere gilt dann $\varphi(f^m p) = \varphi(f^m u)\varphi(p)$. Da $I = (I \cap M) - (I \cap M)$ gilt dies wieder für alle $p \in I$.

Ist $0 < \varphi(f^m u) \leq \frac{1}{2}$, so betrachten wir die Lokalisierungen φ_{f^m} und φ_{1-f^m}. Dieses sind wegen $f^m M \subset M$ und Lemma 3.24 Zustände auf $(I, I \cap T, u)$ und es gilt mit $\alpha := \varphi(f^m u)$, dass $\varphi = \alpha\varphi_{f^m} + (1-\alpha)\varphi_{1-f^m}$. Da φ extremal ist, gilt $\varphi = \varphi_{f^m}$ und $\varphi = \varphi_{1-f^m}$, also $\varphi(f^m p) = \varphi(f^m u)\varphi(p)$. □

Damit erhalten wir hier analog zum Semiring T, dass reine Zustände auf $(A, M, 1)$ multiplikativ sind, indem wir wieder $I = A$ und $u = 1$ betrachten.

3.25 Korollar. *Jedes $\varphi \in \partial_e S(A, M, 1)$ ist multiplikativ.*

Weiter erhalten wir sofort den Darstellungssatz von Jacobi [Jac01], welcher den Reellen Darstellungssatz auf Moduln höherer Stufe verallgemeinert.

3.26 Satz (Jacobi)**.** *Sei $f \in A$. Ist $\varphi(f) > 0$ für alle $\varphi \in X(M)$, so ist $f \in M$.*

Ist M ein endlich erzeugter quadratischer Modul im Polynomring $\mathbb{R}[\bar{X}]$, so ergibt sich der Satz von Putinar [Put93]. Damit erhält man mit dem Satz von Minkowski 1.13 den folgenden Satz über konvexe Polytope als Spezialfall von [PD01, Thm.5.4.6]. Hierbei kann man entsprechend zu Satz 3.8 auch wieder Obermoduln höherer Stufe von M betrachten.

3.27 Satz. *Seien $h_1, \dots, h_s \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ linear, so dass das konvexe Polyeder K_M nichtleer und kompakt ist. Dann gilt: Ist $f > 0$ auf K_M, so ist $f \in M = M(h_1, \dots, h_s)$.*

Hier ist die Nichtnegativität eines Polynoms im Allgemeinen auch nur notwendig aber nicht hinreichend für die gewünschte Darstellung $f = \sigma_1 h_1 + \cdots + \sigma_s h_s$ mit $\sigma_s \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^m$, so dass es quadratische Moduln M und Polynome $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ gibt mit $f \geq 0$ auf K_M und $f \notin M$, wie das folgende Beispiel [Scha, Bem.3.9] zeigt.

3.28 Beispiel. Wir betrachten den quadratischen Modul $M = M(X, Y, 1 - X - Y)$ in $\mathbb{R}[X, Y]$. Dann ist K_M kompakt und M nach Korollar 1.15 archimedisch. Das Polynom $f = XY + X^3 + Y^3$ ist positiv in K_M bis auf den Ursprung, welcher in K_M liegt, aber es ist $f \notin M$.

Angenommen, f besitzt eine Darstellung in M, also

$$f = \sigma_0 + \sigma_1 X + \sigma_2 Y + \sigma_3(1 - X - Y) \quad \text{mit } \sigma_i \in \sum \mathbb{R}[X, Y]^2. \tag{6}$$

Die Nullstelle $(0, 0)$ von f liefert $0 = \sigma_0(0, 0) + \sigma_3(0, 0)$. Da σ_0 und σ_3 Quadratsummen in $\mathbb{R}[X, Y]$ und damit nichtnegativ sind, muss schon $\sigma_0(0, 0) = \sigma_3(0, 0) = 0$ gelten. Damit besitzen σ_0 und σ_3 keine konstanten Terme. Da sie Quadratsummen sind, besitzen sie damit auch keine linearen Terme in X oder Y. Setzt man $Y = 0$, so werden also $\sigma_0(X, 0)$ und $\sigma_3(X, 0)$ von X^2 geteilt. Damit erhält man aus Gleichung (6)

$$X^3 - \sigma_0(X, 0) - \sigma_3(X, 0)(1 - X) = \sigma_1(X, 0)X. \tag{6'}$$

Also wird $\sigma_1(X, 0)X$ von X^2 geteilt. Damit ist auch $\sigma_1(0, 0) = 0$ und σ_1 besitzt ebenfalls keinen konstanten und keinen linearen Term in X oder Y. Indem man $X = 0$ betrachtet, erhält man analog, dass in σ_2 keine konstanten oder linearen Terme auftreten. Damit ist der minimale Grad aller σ_i stets ≥ 2. Somit muss XY schon durch $\sigma_0 + \sigma_3$ erzeugt werden, ist also eine Quadratsumme, welches nicht möglich ist, da XY negative Werte annimmt. Widerspruch.

Auch hier gilt unter unserer Generalvoraussetzung die Charakterisierung der reinen Zustände auf $(I, I \cap M, u)$ nach Satz 3.10.

3.29 Satz. *Sei $\varphi \in \partial_e S(I, I \cap M, u)$ ein reiner Zustand auf $(I, I \cap M, u)$. Dann existiert ein $\varphi^* \in X(M)$, so dass für alle $f \in A$ und $p \in I$ gilt*

$$\varphi(fp) = \varphi^*(f)\varphi(p).$$

Weiter gilt für φ entweder

(a) $\varphi = \frac{\varphi^*|_I}{\varphi(u^2)} = \varphi_u|_I$

oder

(b) $\varphi^*(I) = 0$ *und damit* $\varphi(I^2) = 0$.

Beweis. Der Beweis ist analog wie im Fall des Semirings. Die Bedingung $uM \subset M$ liefert uns $\varphi^* \in X(M)$ und mit Satz 3.22 die Relation $\varphi(fp) = \varphi^*(f)\varphi(p)$. □

Damit gilt auch hier das folgende Korollar.

3.30 Korollar. *Sei $\varphi \in S(I, I \cap M, u)$ mit $\varphi(fp) = \varphi(fu)\varphi(p)$ für alle $f \in A$ und $p \in I$. Definiert man φ^* durch $\varphi^*(f) := \varphi(fu)$ für $f \in A$, dann ist φ^* multiplikativ.*

Die Beweise der nächsten Sätze 3.31-3.33 sind analog zum Fall des Semirings, da wir die Multiplikativität von T nicht direkt ausgenutzt haben. Daher seien hier nur die Aussagen formuliert und für den Beweis auf Abschnitt 3.1, Sätze 3.12-3.14 verwiesen. Da wir in den Beweisen jedoch von Satz 3.4 bzw. Satz 3.22 Gebrauch machen, müssen wir auch hier stets $uM \subset M$ voraussetzen.

3.31 Korollar. *Es gilt für alle $\varphi \in S(I, I \cap M, u)$, dass $\varphi(p^2) \geq 0$ für alle $p \in I$.*

Somit sind auch hier die Werte von Quadratsummen nichtnegativ. Diese Aussage wird für quadratische Moduln trivial.

Weiter gelten die zwei folgenden Ungleichungen entsprechend zu Satz 3.13, die uns eine Umkehrung von Satz 3.29(a) ermöglichen.

3.32 Lemma. *Es gelten für alle $\varphi \in S(I, I \cap M, u)$ die folgenden Ungleichungen:*

i) $\varphi(fg)^2 \leq \varphi(f^2)\varphi(g^2)$ *für alle* $p, q \in I$

ii) $\varphi(f^2)^2 \leq \varphi(f)\varphi(f^3)$ *für* $p \in I$ *mit* $\varphi(p) \geq 0$.

Damit sind auch hier alle multiplikativen Zustände auf $(A, M, 1)$ reine Zustände. Es gilt also $\partial_e S(A, M, 1) = X(M)$.

3.33 Satz. *Jeder multiplikative Zustand $\varphi \in S(A, M, 1)$ ist rein.*

Für die Umkehrung von Satz 3.10 haben wir $T{\cdot}T \subset T$ genutzt, so dass wir hier den Beweis der entsprechenden Formulierung zu Satz 3.15 leicht abändern müssen. Da Bemerkung 1.19 nur für quadratische Moduln gezeigt wurde, setzen wir hier voraus, dass M ein quadratischer Modul ist.

3.34 Satz. *Sei M ein quadratischer Modul. Sei $\varphi \in S(I, I \cap M, u)$ mit $\varphi(fp) = \varphi(fu)\varphi(p)$ für alle $f \in A$ und $p \in I$ und sei $\varphi(u^2) \neq 0$. Dann ist φ ein reiner Zustand auf $(I, I \cap M, u)$.*

Beweis. Im wesentlichen verläuft der Beweis wie für Satz 3.15. Da sich Proposition 3.17 direkt auf $(I, I \cap M)$ überträgt, müssen wir lediglich begründen, warum $\varphi_1(p^3) \geq 0$ für jeden Zustand $\varphi_1 \in S(I, I \cap M, u)$ und $p \in I \cap M$ ist. Sei dazu zunächst $\psi \in \partial_e S(I, I \cap M, u)$. Dann gilt für $p \in I \cap M$ nach Satz 3.22

$$\psi(p^3) = \psi(pu)^2 \psi(p) = \psi(u^2)^2 \psi(p)^3 \geq 0.$$

Somit ist $\psi(p^3) \geq 0$ für alle reinen Zustände $\psi \in \partial_e S(I, I \cap M, u)$ und damit gilt mit Korollar 1.8, dass $\varphi_1(p^3) \geq 0$ für $\varphi_1 \in S(I, I \cap M, u)$. □

Der Beweis verläuft analog für Moduln höherer Stufe, sofern $\mathbb{R} \subset A$ gilt, da wir dann Bemerkung 1.19 nicht benötigen.

Damit weisen die reinen Zustände auf $(I, I \cap M, u)$ mit $uM \subset M$ die gleiche Struktur auf wie die reinen Zustände auf $(I, I \cap T, u)$. Sie erfüllen alle $\varphi(fp) = \varphi(fu)\varphi(p)$ für $f \in A$ und $p \in I$. Ist $\varphi(u^2) \neq 0$, so ist φ gleich der Einschränkung der Lokalisierung von φ nach u. Ist umgekehrt $\varphi = \varphi_u$, so ist φ schon rein. Für $\varphi(u^2) = 0$ gibt es wieder keine Umkehrung, hier muss man konkret nachprüfen, ob ein reiner Zustand vorliegt oder nicht. Dieses wird im vierten Kapitel für verschiedene Ideale im Polynomring $\mathbb{R}[\bar{X}]$ untersucht, um einen weiteren Darstellungssatz für nichtnegative Polynome (Satz A.5) zu beweisen.

Analog zu Satz 3.20 können wir auch hier den folgenden abstrakten Darstellungssatz formulieren.

3.35 Satz. *Sei $f \in A$. Ist $\varphi(f) \geq 0$ für alle $\varphi \in X(M)$ und existiert eine Darstellung*

$$f = g_1 t_1 + \cdots + g_s t_s \tag{7}$$

mit $t_i \in M$ und $g_i \in A$, so dass $t_i M \subset M$ und $\psi(g_i) > 0$ für alle $\psi \in X(M) \cap \{f = 0\}$ gilt, dann ist $f \in M$.

Beweis. Wir betrachten wieder das durch die t_i endlich erzeugte Ideal $I = (t_1, \ldots, t_s)$, dann ist $u := t_1 + \cdots + t_s$ eine Ordnungseinheit von $(I, I \cap M)$ mit $uM \subset M$, da wegen $t_i M \subset M$ für $p \in I$ und geeignete $n_i \in \mathbb{N}$ stets $p = f_1 t_1 + \cdots + f_s t_s \leq_M n_1 t_1 + \cdots + n_s t_s \leq_M N \sum_{i=1}^{s} t_i$ mit $N := \max_{i=1,\ldots,s} n_i$ gilt.
Der Rest verläuft analog zum Beweis von Satz 3.20. □

Die Identität $f = 1 \cdot f$ für $f \in M$ liefert uns wieder die formale Umkehrung der Aussage von Satz 3.35, so dass auch hier $f \in M$ genau dann gilt, wenn $f \geq 0$ bezüglich $X(M)$ ist und f die oben geforderte Darstellung besitzt.

Aus der Identität $f = f \cdot 1$ folgt der Darstellungssatz von Marshall 3.26 und damit als Spezialfälle die Sätze von Jacobi [Jac01] und Putinar [Put93]. Fassen wir die Quadratsummen von A als quadratischen Modul auf, so ergibt sich für eine Darstellung (7) der Gestalt $f = g_1 \cdot 1 + g_2 t$ Theorem 2.5 von Scheiderer aus [Sch03]. In [Scha] zeigt Scheiderer eine entsprechende Formulierung für allgemeine quadratische Moduln, wobei er auf die für uns notwendige Voraussetzung $t_i M \subset M$ verzichten kann.

Ist T eine Präordnung höherer Stufe, so können wir einen weiteren Darstellungssatz zeigen, welcher für Präordnungen in [Sch03] und für quadratische Moduln in [Scha] oder

[Mar] formuliert ist. Dabei genügt in der Version für quadratische Moduln schon $f \in M + (f^2)$. Da wir jedoch wieder eine Ordnungseinheit u mit $uM \subset M$ konstruieren müssen, können wir diesen allgemeineren Fall hier nicht zeigen.

3.36 Satz. *Sei A kommutativer Ring, sei T eine Präordnung der Stufe m und M archimedischer T-Modul. Sei $f \in A$, so dass $\varphi(f) \geq 0$ für alle $\varphi \in X(M)$. Dann gilt: Ist $f \in T + (f^m)$, so ist $f \in M$.*

Beweis. Da für $m = 1$ schon $A = M$ gilt, sei $m \geq 2$. Wir können f darstellen durch $f = t + gf^m$ für ein gewisses $t \in T$ und $g \in A$. Wir betrachten das Ideal $I = (t, f^m)$. Dann ist $f \in I$ und $u := t + f^m$ eine Ordnungseinheit von $(I, I \cap M)$ mit $uM \subset M$, da $tM \subset M$ und $f^m M \subset M$ ist. Sei $\varphi \in \partial_e S(I, I \cap M, u)$ gegeben, dann betrachten wir φ^* zu φ und unterscheiden wieder die zwei Fälle gemäß Satz 3.29:

(a) $\varphi^*(u) > 0$. Wegen $\varphi(f) = \frac{1}{\varphi^*(u)}\varphi^*(f)$ mit $\varphi^* \in X(M)$ ist nach Voraussetzung $\varphi(f) \geq 0$. Angenommen, $\varphi(f) = 0$. Dann folgt mit $0 = \varphi(f) = \varphi(t) + \varphi^*(g)\varphi(f^m)$, dass

$$\varphi(t) = -\varphi^*(g)\varphi(f^m) = \varphi^*(1-g)\varphi(f^m) - \varphi(f^m)$$

und damit

$$1 = \varphi(t + f^m) = \varphi^*(1-g)\varphi(f^m) = \varphi^*(1-g)\varphi^*(f^{m-1})\varphi(f) = 0.$$

Widerspruch.

(b) $\varphi^*(u) = 0$. Angenommen, $\varphi(f) \leq 0$. Dann folgt mit $0 \geq \varphi(f) = \varphi(t) + \varphi^*(g)\varphi(f^m)$, dass

$$\varphi(t) \leq \varphi^*(1-g)\varphi(f^m) - \varphi(f^m)$$

und damit

$$1 = \varphi(t + f^m) \leq \varphi^*(1-g)\varphi(f^m) = \varphi^*(1-g)\varphi^*(f^{m-2})\varphi(f^2) = 0,$$

da $f^2 \in I^2$ und damit $\varphi(f^2) = 0$. Widerspruch.

Somit ist $\varphi(f) > 0$ für alle $\varphi \in \partial_e S(I, I \cap M, u)$ und damit gilt nach Satz 2.6, dass $f \in M$ ist. $\square$

Kapitel 4

Darstellung nichtnegativer Polynome

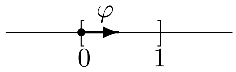
In diesem Kapitel betrachten wir den Polynomring $\mathbb{R}[\bar{X}] = \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ mit einem archimedischen quadratischen Modul M oder einer archimedischen Präordnung T.

In Beispiel 3.19 haben wir gesehen, dass man im Gegensatz zur Darstellung positiver Polynome bei der Darstellung nichtnegativer Polynome weitere Forderungen an f stellen muss. Beispiel 3.9 zeigt, dass wir auch Ableitungen als reine Zustände auf Idealen in $\mathbb{R}[\bar{X}]$ erhalten können.

Um herauszufinden, welche Bedingungen an f gestellt werden müssen, damit $\varphi(f) > 0$ für alle reinen Zustände auf gegebenem $(I, I \cap M, u)$ gilt, untersuchen wir die reinen Zustände auf bestimmten Idealen $(I, I \cap M, u)$. Dabei sind lediglich die Zustände vom Typ (b) aus Satz 3.10 bzw. 3.29 von Interesse, da die Zustände φ mit $\varphi(u^2) \neq 0$ schon durch $\varphi(u^2)\varphi(p) = \varphi^*(p)$ mit $\varphi^* \in X(T)$ und $\varphi^*(u) \neq 0$ klassifiziert sind.

Betrachten wir noch einmal das folgende Beispiel.

4.1 Beispiel. Sei $A = \mathbb{R}[X]$ mit der Präordnung $T = \mathrm{TP}(X, 1 - X)$. Dann ist $K_T = [0, 1]$ kompakt und damit ist T archimedisch. Sei $I = (X)$ mit der Ordnungseinheit $u := X \in T \cap I$ versehen. Dann ist die Abbildung φ definiert durch



$$\varphi(p) := \frac{\partial p}{\partial X}(0) \text{ für } p \in I$$

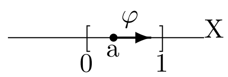
der einzige reine Zustand auf $(I, I \cap T, u)$ vom Typ (b) in Satz 3.10.

Beweis. Wir haben in Beispiel 3.9 schon gezeigt, dass φ ein reiner Zustand auf $(I, I \cap T, u)$ ist. Wegen $\varphi(u^2) = \varphi(X^2) = 0$ ist φ nach Satz 3.10 ein reiner Zustand vom Typ (b).

Sei ψ ein reiner Zustand auf $(I, I \cap T, u)$. Dann gilt $\psi(fp) = \psi^*(f)\psi(p)$ mit $\psi^* \in X(T)$. Somit ist ψ^* Einsetzung eines Punktes aus K_T. Weiter ist ψ nach Satz 3.10 entweder vom Typ (a), also eine normierte Einsetzung eines Punktes $x \in K_T \setminus \{0\}$ (da hierfür $\psi(X^2) \neq 0$ gilt), oder ψ erfüllt $\psi(fp) = f(0)\psi(p)$ für $f \in \mathbb{R}[X]$ und $p \in I$. Da jedes $p \in I$ eine Darstellung $p = fu$ mit $f \in \mathbb{R}[X]$ besitzt, folgt $\psi(p) = \psi(fu) = f(0) = \varphi^*(f) = \varphi(fu) = \varphi(p)$, also $\psi = \varphi$. $\square$

Wir betrachten noch ein weiteres eindimensionales Beispiel.

4.2 Beispiel. Wir betrachten $\mathbb{R}[X]$ mit dem quadratischen Modul $M = M(X, 1-X)$. Da $K_M = [0,1]$ kompakt und die Erzeugenden X und $1-X$ linear sind, ist M archimedisch nach Korollar 1.15. Wir betrachten das Ideal $I = ((X-a)^2)$ mit $a \in (0,1)$ fest. Dann ist $u := (X-a)^2$ eine Ordnungseinheit von I mit $uM \subset M$. Da M quadratisch abgeschlossen ist, gilt $uM \subset M$. Damit gilt für $f \in \mathbb{R}[X]$ mit $f \leq_M N$, dass $f(X-a)^2 \leq N(X-a)^2$ ist. Die Abbildung φ definiert durch



$$\varphi(p) := \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial X^2}(a) \text{ für } p \in I$$

ist der einzige reine Zustand auf $(I, I \cap M, u)$ mit $\varphi(I^2) = 0$.

Beweis. Es ist klar, dass $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[X], \mathbb{R})$ und $\varphi((X-a)^2) = 1$ gilt. Für eine Funktion $f \geq 0$ auf K_M hat jede Nullstelle x von f im Inneren von K_T immer gerade Ordnung. Weiter muss die Krümmung in dieser Nullstelle stets nichtnegativ sein, da f sonst negative Werte annimmt. Damit ist φ ein Zustand auf $(I, I \cap M, u)$.

Sei $\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$ für $\varphi_1, \varphi_2 \in S(I, I \cap M, u)$. Da u Ordnungseinheit für $(I, I \cap M)$ ist, genügt es zu zeigen, dass $\varphi(p) = \varphi_1(p) = \varphi_2(p)$ für alle $p \in I \cap M$ ist. Wegen $u(a) = 0$ gilt $\varphi(fp) = \varphi(fu)\varphi(p)$ nach der Produktregel für Ableitungen. Damit ist $\varphi^*(f) := \varphi(fu)$ nach Korollar 3.11 ein Ringhomomorphismus mit $\varphi^*(M) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\varphi^*(u) = \varphi^*((X-a)^2) = 0$, also $\varphi^*(X) = a$. Es gilt also $\varphi^*(f) = f(a)$. Mit $\varphi_1^*(f) := \varphi_1(fu)$ und $\varphi_2^*(f) := \varphi_2(fu)$ folgt aus $\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$, dass $\varphi^* = \varphi_1^* = \varphi_2^*$, da φ^* multiplikativ und damit nach Satz 3.14 ein reiner Zustand auf $(\mathbb{R}[X], M, 1)$ ist. Damit ist aber auch $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$, da das Ideal $((X-a)^2)$ schon durch die Menge aller $fu = f(X-a)^2$ mit $f \in \mathbb{R}[X]$ erzeugt wird.

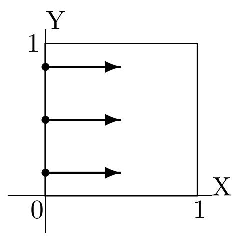
Sei nun ψ ein reiner Zustand auf $(I, I \cap M, u)$. Damit ist ψ nach Satz 3.29 entweder gleich seiner Lokalisierung nach u oder ψ erfüllt die Relation $\psi(fp) = f(a)\psi(p)$ für $f \in \mathbb{R}[X]$ und $p \in I$. Also gilt $\psi(p) = \psi(fu) = f(a) = \varphi^*(f) = \varphi(fu) = \varphi(p)$ für alle $p = fu \in I$ und damit $\psi = \varphi$. $\square$

Wir haben somit für $a \in (0,1)$ alle reinen Zustände auf dem Ideal $((X-a)^2)$ mit der Ordnungseinheit $u = (X-a)^2$ bestimmt. Auch hier finden wir neben den Lokalisierungen eine (zweite) Ableitung in der Nullstelle von u als zusätzlichen reinen Zustand. Dafür fällt der Zustand $\varrho : p \mapsto p(a)$ weg, für den wir hier nicht mehr $\varrho(u) = 1$ erfüllen können.

Auch bei mehr als einer Unbestimmten können wir bei bestimmten Idealen deren reine Zustände bestimmen. Dazu bezeichne $V(I) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0 \text{ für alle } f \in I\}$ die Nullstellenmenge eines Ideals $I \subset \mathbb{R}[\bar{X}]$.

Wir betrachten zunächst ein Beispiel, bei dem $V(I)$ auf dem Rand von K_T liegt. Dann treten erste Ableitungen auf.

4.3 Beispiel. Wir betrachten den Polynomring $\mathbb{R}[X, Y]$ in zwei Unbestimmten mit der Präordnung $T = \mathrm{TP}(1-X, 1-Y, X, Y)$. Dann ist K_T im $\mathbb{R}^2$ durch ein Einheitsquadrat im ersten Quadranten gegeben, also beschränkt und damit ist T archimedisch. Weiter betrachten wir $I = (X)$ mit der Ordnungseinheit $u := X$. Dann sind die durch



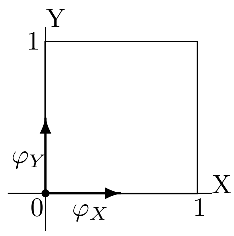
$$\varphi_y(p) := \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial X}(0, y) \text{ für } y \in [0,1]$$

definierten Abbildungen reine Zustände auf $(I, I \cap T, u)$ (hier ist nicht die Lokalisierung gemeint). Dieses sind die einzigen reinen Zustände auf $(I, I \cap T, u)$ mit $\varphi(I^2) = 0$.

Beweis. Mit gleicher Argumentation wie in Beispiel 3.9 ist klar, dass φ_y für $y \in [0,1]$ ein Zustand ist, da auch hier alle Polynome $f \in T$ eine nichtnegative Steigung ins Innere von K_T besitzen. Ist $\varphi_y = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$ mit $\varphi_1, \varphi_2 \in S(I, I \cap T, u)$, dann ist $\varphi_y = \varphi_1 = \varphi_2$ nach folgender Argumentation. Sei $y \in [0,1]$ fest gewählt. Wir definieren wieder $\varphi_y^*(p) := \varphi_y(pu)$ für $p \in \mathbb{R}[X,Y]$, dann gilt $\varphi_y(p) = \varphi_y(fu) = \varphi_y^*(f)$ für geeignetes $f \in \mathbb{R}[X,Y]$, da jedes $p \in I$ eine Darstellung $p = fX = fu$ für ein $f \in \mathbb{R}[X,Y]$ besitzt. Weiter gilt $\varphi_y^*(f) = \varphi(fu) = f(0,y)$, somit ist φ_y^* ein reiner Zustand auf $(\mathbb{R}[X,Y], T, 1)$. Analog seien $\varphi_1^*(f) := \varphi_1(fu)$ und $\varphi_2^*(f) := \varphi_2(fu)$ definiert. Dann ist $\varphi_y^* = \frac{1}{2}(\varphi_1^* + \varphi_2^*)$, also $\varphi_y^* = \varphi_1^* = \varphi_2^*$. Damit gilt wieder $\varphi_y(fu) = \varphi_1(fu) = \varphi_2(fu)$ für alle $f \in \mathbb{R}[X,Y]$, also $\varphi_y = \varphi_1 = \varphi_2$.

Ist ψ ein reiner Zustand auf $(I, I \cap T, u)$, dann ist ψ nach Satz 3.10 entweder eine normierte Einsetzung eines Punktes aus $K_T \setminus V(I)$ oder ψ erfüllt $\psi(fp) = f(x,y)\psi(p)$ für $f \in \mathbb{R}[X,Y], p \in (X)$ und es gilt $\psi(u^2) = 0$, also $(x,y) \in V((X)) \cap K_T = \{0\} \times [0,1]$. Damit gilt also $\psi(fu) = f(0,y) = \varphi_y(fu)$ für ein $y \in [0,1]$. □

Als nächstes betrachten wir ein Ideal, welches kein Hauptideal ist. Auch hier können wir vom reinen Zustand $\varphi^* \in \partial_e S(\mathbb{R}[\bar{X}], T, 1)$ aus erschließen, dass φ schon rein sein muss auf $(I, I \cap T, u)$.



4.4 Beispiel. Sei $\mathbb{R}[X,Y]$ mit der archimedischen Präordnung $T = \mathrm{TP}(1-X, 1-Y, X, Y)$ versehen. Wir betrachten das Ideal $I = (X,Y)$ mit der Ordnungseinheit $u = X + Y$. Dann sind die durch

$$\varphi_X(p) := \frac{\partial p}{\partial X}(0,0) \qquad \text{und} \qquad \varphi_Y(p) := \frac{\partial p}{\partial Y}(0,0)$$

gegebenen Abbildungen reine Zustände auf $(I, I \cap T, u)$. Dieses sind wieder die einzigen reine Zustände mit $\varphi(u^2) = 0$. Jede andere Ableitung in Null ins Innere von K_T ist Konvexkombination von φ_X und φ_Y und damit kein reiner Zustand auf $(I, I \cap T, u)$.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass φ_X und φ_Y rein sind. Wir betrachten ohne Einschränkung φ_X. Sei $\varphi_X = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$ für $\varphi_1, \varphi_2 \in S(I, I \cap T, u)$. Es genügt wieder zu zeigen, dass $\varphi(p) = \varphi_1(p) = \varphi_2(p)$ für $p \in T \cap (X,Y)$ gilt. Ist $\varphi_X(p) = 0$, so folgt wegen $\varphi_1(p), \varphi_2(p) \geq 0$ aus $\varphi_X(p) = 0 = \frac{1}{2}(\varphi_1(p) + \varphi_2(p))$ schon, dass $\varphi_1(p) = \varphi_2(p) = 0$. Ebenso erhält man aus $\varphi(T \cdot p) = 0$ schon $\varphi_1(T \cdot p) = \varphi_2(T \cdot p) = 0$. Da man aufgrund der Archimedizität von T für $f \in \mathbb{R}[X,Y]$ eine Zerlegung $fp = f_1 p - f_2 p$ mit $f_1, f_2 \in T$ erhält, folgt damit aus $\varphi(fp) = 0$ auch $\varphi_1(fp) = \varphi_2(fp) = 0$ für $f \in \mathbb{R}[X,Y]$ und $p \in I \cap T$.

Jedes $p \in (X,Y)$ kann man durch $p = h_1 X + h_2 Y$ für gewisse $h_1, h_2 \in \mathbb{R}[X,Y]$ darstellen. Da $Y \in T$ und $\varphi_X(h_2 Y) = 0$ für alle $h_2 \in \mathbb{R}[X,Y]$ und damit $\varphi_1(h_2 Y) = \varphi_2(h_2 Y) = 0$, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $p = h_1 X$ für ein $h_1 \in \mathbb{R}[X,Y]$. Hierfür gilt $\varphi_X(h_1 X) = \varphi_X(h_1 u)\varphi_X(X) = h_1(0,0)$. Definiert man wieder $\varphi^*(f) := \varphi_X(fu)$ und $\varphi_1^*(f) := \varphi_1(fu)$ sowie $\varphi_2^*(f) := \varphi_2(fu)$, so folgt wieder $\varphi^* = \varphi_1^* = \varphi_2^*$, da φ^* ein reiner Zustand auf $(A, T, 1)$ ist. Damit gilt $\varphi_X(h_1 X + h_2 Y) = \varphi_X(h_1(X+Y)) + \varphi_X((h_2 - h_1)Y) = \varphi_X(h_1 u) = \varphi^*(h_1)$. Analog erhält man $\varphi_1(h_1 X + h_2 Y) = \varphi_1(h_1 X) = \varphi_1^*(h_1) = \varphi^*(h_1)$, also $\varphi_X(p) = \varphi^*(h_1) = \varphi_1^*(h_1) = \varphi_1(p)$. Damit gilt aber $\varphi_X = \varphi_1 = \varphi_2$.

Sei wieder ψ ein reiner Zustand auf $(I, I \cap T, u)$ mit $\psi(u^2) = 0$. Dann gilt wieder $\psi(fp) = f(0,0)\psi(p)$ für $f \in \mathbb{R}[X,Y]$ und $p \in I$. Also gilt für $p = h_1 X + h_2 Y$, dass $\psi(p) = h_1(0,0)\psi(X) + h_2(0,0)\psi(Y)$. Somit ist ψ schon durch $\psi(X)$ und $\psi(Y)$ gegeben. Weiter gilt mit dem oben gezeigten $\psi(p) = \varphi_X(p)\psi(X) + \varphi_Y(p)\psi(Y)$. Da $\psi(u) = 1$, muss

$\psi(X) + \psi(Y) = 1$ sein. Außerdem ist $\psi(X), \psi(Y) \geq 0$, da $X, Y \in I \cap T$. Somit ist ψ Konvexkombination von φ_X und φ_Y, es muss also $\psi = \varphi_X$ oder $\psi = \varphi_Y$ sein. □

In den letzten beiden Beispielen hätten wir statt der endlich erzeugten Präordnung $\mathrm{TP}(h)$ auch den über $\mathbb{R}_{\geq 0}$ endlich erzeugten Semiring $\mathrm{TS}(h)$ betrachten können, da alle h_i linear sind.

Als nächstes betrachten wir ein Ideal, dessen Varietät im Inneren von K_T liegt und erhalten wieder zweite Ableitungen in den Nullstellen der Ordnungseinheit.

4.5 Beispiel. Sei $\mathbb{R}[X, Y]$ mit der archimedischen Präordnung $T = \mathrm{TP}(1 - X^2 - Y^2)$ versehen und das Ideal $I = (X^2, Y^2)$ mit der Ordnungseinheit $u = X^2 + Y^2$. Sei $p \in I$, dann sind die Abbildungen

$$\varphi_X(p) := \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial X^2}(0,0) \qquad \text{und} \qquad \varphi_Y(p) := \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial Y^2}(0,0)$$

die einzigen reinen Zustände auf $(I, I \cap T, u)$ vom Typ (b) in Satz 3.10.

Beweis. Die Aussagen folgen analog zu den vorherigen Beispielen.

Jedes $f \in I \cap T$ besitzt analog zum eindimensionalen Fall nichtnegative Krümmung in jede Richtung, da $f \in I \cap T$ sonst negative Werte annimmt. Damit sind φ_X und φ_Y Zustände auf $(I, I \cap T, u)$.

Sei $\varphi_X = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$ mit $\varphi_1, \varphi_2 \in S(I, I \cap T, u)$, weiter sei $p \in T \cap (X^2, Y^2)$. Dann besitzt p eine Darstellung $p = h_1 X^2 + h_2 Y^2$ mit $h_1, h_2 \in \mathbb{R}[X, Y]$. Für $\varphi_X(p) = 0$ folgt wieder $\varphi_1(p) = \varphi_2(p) = 0$, da $\varphi_1(p), \varphi_2(p) \geq 0$. Wegen $f = f_1 - f_2$ mit $f_1, f_2 \in T$, folgt damit für $f \in \mathbb{R}[X, Y]$ und $q \in I \cap \sum \mathbb{R}[X, Y]^2$ aus $\varphi(fq) = 0$ auch $\varphi_1(fq) = \varphi_2(fq) = 0$, da $\varphi_1(f_i q), \varphi_2(f_i q) \geq 0$ sind für alle $f_i \in T$. Da $\varphi_X(h_2 Y^2) = 0$ für alle $h_2 \in \mathbb{R}[X, Y]$, gilt also $\varphi_1(h_2 Y^2) = \varphi_2(h_2 Y^2) = 0$. Somit können wir wieder ohne Einschränkung annehmen, dass $p = h_1 X^2$ für ein $h_1 \in \mathbb{R}[X, Y]$. Hierfür gilt ebenso $\varphi_X(h_1 X^2) = h_1(0, 0)$. Mit φ^*, φ_1^* und φ_2^* wie oben, folgt $\varphi^* = \varphi_1^* = \varphi_2^*$. Also $\varphi(p) = \varphi_X(h_1 X^2 + h_2 Y^2) = \varphi_X(h_1 X^2) = \varphi^*(h_1) = \varphi_1^*(h_1) = \varphi_1(p)$.

Ist ψ ein reiner Zustand auf $(I, I \cap T, u)$ mit $\psi(I^2) = 0$, so gilt wieder $\psi(fp) = f(0,0)\varphi(p)$ für $f \in \mathbb{R}[X, Y]$ und $p \in I$. Also gilt auch hier $\psi(p) = h_1(0,0)\psi(X^2) + h_2(0,0)\psi(Y^2) = \varphi_X(f)\psi(X^2) + \varphi_Y(f)\psi(Y^2)$ mit $\psi(X^2), \psi(Y^2) \geq 0$, da $X^2, Y^2 \in I \cap T$. Wegen $\psi(u) = 1$ ist wieder $\psi(X^2) + \psi(Y^2) = 1$, also ist ψ wieder Konvexkombination von φ_X und φ_Y und damit muss $\psi = \varphi_X$ oder $\psi = \varphi_Y$ sein. □

Es treten in den betrachteten Beispielen entweder erste Ableitungen in den Nullstellen von u ins Innere von K_T als zusätzliche reine Zustände auf $(I, I \cap T, u)$ auf, wenn die Nullstellenmenge $V(I)$ auf dem Rand von K_T liegt, oder zweite Ableitungen ausgewertet in einer Nullstelle von u, wenn $V(I)$ im Inneren von K_T enthalten ist. Dafür fallen die Einsetzungen in den Nullstellen von u also alle reinen Zustände auf $(\mathbb{R}[\bar{X}], T, 1)$ der Gestalt $\varrho : p \mapsto p(x)$ mit $\varrho(u) = u(x) = 0$ weg. Wir sehen, dass die reinen Zustände φ mit $\varphi(u^2) = 0$ auf unseren betrachteten Idealen stets schon durch die Werte der Erzeugenden festgelegt sind. Damit sind dann schon alle reinen Zustände festgelegt. Es sind hier also stets Einsetzungen auf $K_T \setminus V(I)$ oder gewisse Ableitungen in den Nullstellen die reinen Zustände auf dem Ideal $(I, I \cap T, u)$.

Unser Ziel ist es daher, den folgenden Darstellungssatz von Scheiderer [Scha, Cor.3.6] für archimedische quadratische Moduln direkt aus Satz 2.6 abzuleiten.

Mit $D^2 f(x)$ bezeichnen wir die Hessematrix von f im Punkt $x \in \mathbb{R}^n$.

4.6 Satz (Scheiderer). *Sei M ein archimedischer quadratischer Modul auf dem Polynomring $\mathbb{R}[\bar{X}]$. Weiter sei $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ mit $f \geq 0$ auf K_M. Besitzt f nur endlich viele Nullstellen $x_1, \ldots, x_k$ in K_M, welche alle im Inneren von K_M liegen, und ist $D^2 f(x_i)$ positiv definit für $i = 1, \ldots, k$, dann ist $f \in M$.*

Ist $f > 0$ auf K_M, so erhalten wir den Satz von Putinar [Put93] für quadratische Moduln als Spezialfall zum Satz von Jacobi 3.26.

Da hierzu Einiges zu zeigen ist, geben wir vorher eine Beweisskizze an. Zunächst betrachten wir den Spezialfall, dass f nur eine einzige Nullstelle in K_M besitzt. Hierzu konstruieren wir ein Ideal I mit Ordnungseinheit u, welches f enthält und für das wir alle reinen Zustände auf $(I, I \cap M, u)$ bestimmen können. Anschließend betrachten wir den allgemeinen Fall und konstruieren wieder ein geeignetes Ideal mit Ordnungseinheit u. Hier können wir wieder alle reinen Zustände bestimmen, indem wir den allgemeinen Fall auf den Spezialfall zurückführen. Wie in den Beispielen treten auch hier gewisse zweite Richtungsableitungen als zusätzliche reine Zustände auf, wofür die „kritischen" reinen Zustände ϱ auf $(\mathbb{R}[\bar{X}], M, 1)$ mit $\varrho(p) = p(x_i)$ entfallen. Da $D^2 f(x_i)$ für alle Nullstellen x_i positiv ist, erhalten wir dann $\varphi(f) > 0$ für alle reinen Zustände auf dem konstruierten Ideal.

Sei also x die einzige Nullstelle von f in K_M. Diese liege im Inneren von K_M. Ohne Einschränkung können wir x als Ursprung wählen, indem wir gegebenenfalls eine Variablentransformation auf den Ursprung durchführen. Sei $\mathfrak{m} := \{g \in \mathbb{R}[\bar{X}] \mid g(x) = 0\}$ das zu x gehörende maximale Ideal in $\mathbb{R}[\bar{X}]$, dann ist $f \in \mathfrak{m} = (X_1, \ldots, X_n)$. Da wir hier aber im Allgemeinen keine Ordnungseinheit u von $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m} \cap M)$ mit $uM \subset M$ finden werden, betrachten wir das Ideal $\mathfrak{m}^2 = (X_i X_j \mid 1 \leq i \leq j \leq n)$. Da die Nullstelle x im Inneren von K_M liegt, existiert eine Umgebung $U(x)$, in der $f(y) > 0$ ist für alle $y \in U(x) \setminus \{x\}$. Damit besitzt f keinen linearen Term, also ist $f \in \mathfrak{m}^2$.

4.7 Bemerkung. Es gilt $\mathfrak{m}^2 = (X_i X_j \mid 1 \leq i, j \leq n) = ((X_i + X_j)^2 \mid 1 \leq i, j \leq n)$. Dabei ist die Inklusion „$\supset$" klar, da $(X_i + X_j)^2 = X_i X_i + 2X_i X_j + X_j X_j$. Die andere Inklusion folgt sofort aus $8X_i X_j = 4(X_i + X_j)^2 - (X_i + X_i)^2 - (X_j + X_j)^2$

Hiermit gilt das folgende Lemma.

4.8 Lemma. *Es ist $u := \sum_{i=1}^n X_i^2$ eine Ordnungseinheit von $(\mathfrak{m}^2, \mathfrak{m}^2 \cap M)$ mit $uM \subset M$.*

Beweis. Wegen $\mathfrak{m}^2 = ((X_i + X_j)^2 \mid 1 \leq i, j \leq n)$ können wir jedes Element $p \in \mathfrak{m}^2$ darstellen als endliche Summe $\sum_{i,j} g_{ij}(X_i + X_j)^2$ mit $g_{ij} \in \mathbb{R}[\bar{X}]$. Dabei treten maximal n^2 verschiedene Terme auf.

Aus $0 \leq_M (X_i - X_j)^2 = X_i^2 + X_j^2 - 2X_i X_j$ folgt $2X_i X_j \leq_M X_i^2 + X_j^2 \leq_M u$, also $(X_i + X_j)^2 \leq_M 2u$. Da $\mathbb{R}$ archimedisch ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $g_{ij} \leq_M N$ für alle in obiger Darstellung auftretenden g_{ij}. Damit folgt

$$p = \sum_{i,j} g_{ij}(X_i + X_j)^2 \leq_M N \sum_{i,j} (X_i + X_j)^2 \leq_M N n^2 2u. \qquad \square$$

Da für den Beweis von Satz 4.6 die Hessematrix und damit die zweiten Ableitungen eines Polynoms von besonderem Interesse sind, zeigen wir zunächst, dass die zweiten Ableitungen in Null in unserem Fall reine Zustände auf $(\mathfrak{m}^2, \mathfrak{m}^2 \cap M, u)$ sind.

4.9 Proposition. *Für $i = 1, \ldots, n$ ist φ_i definiert durch*

$$\varphi_i(p) := \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial X_i^2}(0)$$

für $p \in \mathfrak{m}^2$ ein reiner Zustand auf $(\mathfrak{m}^2, \mathfrak{m}^2 \cap M, u)$.

Beweis. Sei ohne Einschränkung $i = 1$. Die Abbildung φ_1 ist $\mathbb{R}$-linear und es gilt $\varphi_1(u) = \varphi_1(\sum X_i^2) = 1$. Weiter ist $\varphi_1(\mathfrak{m}^2 \cap M) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$, da der Ursprung nach Voraussetzung im Inneren von K_M liegt und jedes $p \in \mathfrak{m}^2 \cap M$ somit positive Krümmung in Null besitzen muss, damit $p(x) \geq 0$ für alle $x \in K_M$ gewährleistet ist. Also ist φ_1 ein Zustand auf $(\mathfrak{m}^2, \mathfrak{m}^2 \cap M, u)$.

Sei $\varphi_1 = \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2)$ mit $\psi_1, \psi_2 \in S(\mathfrak{m}^2, \mathfrak{m}^2 \cap M, u)$. Es gilt $\varphi_1|_{\mathfrak{m}^3} = 0$. Ist $\varphi(p) = 0$ für $p \in \mathfrak{m}^2 \cap M$, so ist wegen $\psi_1(p), \psi_2(p) \geq 0$ auch $\psi_1(p) = \psi_2(p) = 0$. Mit $(\mathfrak{m}^2 \cap M) - (\mathfrak{m}^2 \cap M) = \mathfrak{m}^2$ folgt daraus, dass für alle $p \in \mathfrak{m}^2$ mit $\varphi_1(p) = 0$ auch $\psi_1(p) = \psi_2(p) = 0$ und damit $\psi_i|_{\mathfrak{m}^3} = 0$ für $i = 1, 2$ gilt.

Für $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ definieren wir $\varphi^*(f) := \varphi_1(fu)$ und $\psi_1^*(f) := \psi_1(fu)$ sowie $\psi_2^*(f) := \psi_2(fu)$. Dann sind die dadurch gegebenen Abbildungen φ^* sowie ψ_1^* und ψ_2^* Zustände auf $(\mathbb{R}[\bar{X}], M, 1)$. Für φ_1 gilt $\varphi_1(fp) = \varphi_1(fu)\varphi_1(p)$ nach der Produktregel. Damit ist φ^* nach Korollar 3.30 multiplikativ also nach Korollar 3.25 ein reiner Zustand. Damit folgt aus $\varphi^* = \frac{1}{2}(\psi_1^* + \psi_2^*)$, dass $\varphi^* = \psi_1^* = \psi_2^*$ gilt. Sei $p \in \mathfrak{m}^2$ dargestellt durch $p = \sum p_{ij} X_i X_j + P$ mit $p_{ij} \in \mathbb{R}$ und $P \in \mathfrak{m}^3$. Dann gilt $\varphi_1(p) = \varphi_1(\sum p_{ij} X_i X_j + P) = \varphi_1(\sum p_{ij} X_i X_j)$, da $\varphi_1(\mathfrak{m}^3) = 0$ und damit gilt auch $\psi_1(P) = \psi_2(P) = 0$. Sei $q := \sum_{(i,j) \neq (1,1)} p_{ij} X_i X_j - \sum_{i=2}^n X_i^2$. Hierfür gilt $\varphi_1(q) = 0$, also auch $\psi_1(q) = \psi_2(q) = 0$. Daraus folgt weiter, dass

$$\begin{aligned}\varphi_1(p) &= \varphi_1(p_{11} \sum X_i^2) + \varphi_1(q) = \varphi_1(p_{11} u) = \varphi^*(p_{11}) \\ &= \psi_1^*(p_{11}) = \psi_1(p_{11} \sum X_i^2) + \psi_1(q) = \psi_1(\sum p_{ij} X_i X_j + P) = \psi_1(p)\end{aligned}$$

Damit gilt aber $\varphi_1 = \psi_1 = \psi_2$. □

Es sei $\partial_v^2 f(0) = v^t(D^2 f(0))v$ die zweite Ableitung von f in Richtung v im Ursprung. Damit gilt der folgende Satz, welcher uns die reinen Zustände auf $(\mathfrak{m}^2, \mathfrak{m}^2 \cap M, u)$ liefert.

4.10 Satz. *Sei $\varphi \in \partial_e S(\mathfrak{m}^2, \mathfrak{m}^2 \cap M, u)$. Dann gilt entweder*

$$(a) \quad \exists y \in K_M \setminus \{0\} : \forall p \in \mathfrak{m}^2 : \varphi(p) = \frac{p(y)}{\|y\|^2}$$

oder

$$(b) \quad \exists v \in S^{n-1} : \forall p \in \mathfrak{m}^2 : \varphi(p) = \frac{\partial_v^2 p(0)}{2}$$

Beweis. Wir betrachten $\varphi^* \in X(M)$ zu φ und unterscheiden die zwei Fälle:

(a) $\varphi^*(u) > 0$, dann ist wegen $\varphi^*(u) = \varepsilon_y(u) = \sum_{i=1}^n y_i^2 = \|y\|^2$ für ein $y \in K_M \setminus \{0\}$ der Zustand φ gegeben durch $\varphi(p) = \frac{1}{\varphi^*(u)}\varphi^*(p) = \frac{1}{\|y\|^2}p(y)$.

(b) $\varphi^*(u) = 0$, dann ist $\varphi^*(g) = g(0)$ für alle $g \in \mathbb{R}[\bar{X}]$. Also gilt $\varphi(gp) = g(0)\varphi(p)$ für $g \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ und $p \in \mathfrak{m}^2$. Damit ist $\varphi|_{\mathfrak{m}^3} = 0$. Sei $p \in \mathfrak{m}^2$ dargestellt durch $p = \sum_{i,j} p_{ij} X_i X_j + P$ mit $p_{ij} \in \mathbb{R}$ und $P \in \mathfrak{m}^3$. Dann ist $2p_{ij} = D^2 p(0)_{ij}$. Da die Hessematrix symmetrisch ist, können wir diese durch eine orthogonale Transformation diagonalisieren und somit ohne Einschränkung annehmen, dass $p_{ij} = 0$ für $i \neq j$ ist. Dann gilt mit $\lambda_i := \varphi(X_i^2)$, dass

$$\varphi(p) = \sum_{i,j} p_{ij}\varphi(X_i X_j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial X_i^2}(0)\lambda_i.$$

Da $X_i^2 \in M$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, ist $\lambda_i \geq 0$.
Weiter ist $1 = \varphi(u) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$. Damit ist φ Konvexkombination der reinen Zustände φ_i aus Proposition 4.9. Da φ aber extremal ist, muss schon $\varphi = \varphi_i$ gelten für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$. Durch Rücktransformation erhalten wir damit $\varphi(p) = \frac{1}{2}\partial_v^2 p(0)$ für ein $v \in S^{n-1}$. □

Betrachten wir nun den Fall, dass f endlich viele Nullstellen $x_1, \ldots, x_k$ in K_M besitzt, welche alle im Inneren von K_M liegen. Wir setzen wieder $\mathfrak{m}_i := (X_1 - x_{i1}, \ldots, X_n - x_{in})$ als das zu der Nullstelle x_i gehörende maximale Ideal in $\mathbb{R}[\bar{X}]$ und $u_i := \sum_{j=1}^n (X_j - x_{ij})^2$. Analog zu Lemma 4.8 ist damit u_i Ordnungseinheit von $\mathfrak{m}_i^2$. Es gilt zwar $f \in \mathfrak{m}_i^2$ für alle $i = 1, \ldots, k$ und hier kennen wir alle reinen Zustände $\varphi \in \partial_e S(\mathfrak{m}_i^2, \mathfrak{m}_i^2 \cap M, u_i)$, aber es gilt nicht $\varphi(f) > 0$ für alle diese reinen Zustände, da für $i \neq j$ die Einsetzungen ε_j in x_j alle $\varepsilon_j(f) = 0$ liefern. Daher betrachten wir das Ideal $I := \mathfrak{m}_1^2 \cdots \mathfrak{m}_k^2$. Nach dem Chinesischem Restsatz gilt $\mathfrak{m}_1^2 \cdots \mathfrak{m}_k^2 = \mathfrak{m}_1^2 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_k^2$, da nach Lemma 1.18 alle $\mathfrak{m}_i^2$ paarweise teilerfremd sind. Also ist $f \in I$. Hierfür haben wir das folgende Lemma.

4.11 Lemma. *Sei $I = \mathfrak{m}_1^2 \cdots \mathfrak{m}_k^2$, dann ist $u := u_1 \cdots u_k$ eine Ordnungseinheit von $(I, I \cap M)$ mit $uM \subset M$.*

Beweis. Es ist lediglich zu zeigen, dass u eine Ordnungseinheit von I ist. Die Eigenschaft $uM \subset M$ folgt rekursiv aus $u_i M \subset M$ für alle $i = 1, \ldots, k$.

Nach Bemerkung 4.7 ist $\mathfrak{m}_l^2 = ((X_i - x_{li} + X_j - x_{lj})^2 \mid 1 \leq i, j \leq n)$. Wir wählen eine feste Reihenfolge der Erzeugenden $(X_i - x_{li} + X_j - x_{lj})^2$ in jedem Ideal $\mathfrak{m}_l^2$ und schreiben vereinfachend Y_{ml}^2 für den m_l-ten Erzeugenden im Ideal $\mathfrak{m}_l^2$. Dann können wir jedes Element $p \in I$ als endliche Summe $p = f \sum_{m1} a_m Y_{m1}^2 \cdots \sum_{mk} b_m Y_{mk}^2$ mit $f, a_m, b_m \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ darstellen. Ausmultiplizieren liefert eine Darstellung $p = \sum_{m1,\ldots,mk} g_m Y_{m1}^2 \cdots Y_{mk}^2$ für ein gewisses $g_m \in \mathbb{R}[\bar{X}]$. Da nur endlich viele Summanden in der Darstellung von p auftreten und M additiv abgeschlossen ist, genügt es, die einzelnen Summanden durch $N_m u_1 \cdots u_k$ für $N_m \in \mathbb{N}$ abzuschätzen.

Wir zeigen dies zunächst für $k = 2$ und betrachten $gY_{m1}^2 Y_{m2}^2$. Nach Lemma 4.8 existieren $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ mit $Y_{m1}^2 \leq_M N_1 u_1$ und $Y_{m2}^2 \leq_M N_2 u_2$. Da M abgeschlossen unter Multiplikation mit Quadraten und mit den Ordnungseinheiten u_1, u_2 ist, folgt daraus

$$Y_{m1}^2 Y_{m2}^2 \leq_M N_1 u_1 Y_{m2}^2 \qquad \text{und} \qquad Y_{m2}^2 N_1 u_1 \leq_M N_2 u_2 N_1 u_1.$$

Zusammen gilt damit $Y_{m1}^2 Y_{m2}^2 \leq_M N_1 u_1 Y_{m2}^2 \leq_M N_1 N_2 u_1 u_2$. Da M archimedisch ist, existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $g \leq_M N_0$. Abschließend erhält man dann

$$gY_{m1}^2 Y_{m2}^2 \leq_M N_0 Y_{m1}^2 Y_{m2}^2 \leq_M N_0 N_1 N_2 u_1 u_2.$$

Die Aussage für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ erhält man induktiv. Dazu betrachten wir einen Summanden $gY_{m1}^2 \cdots Y_{mk}^2$ der Länge k. Dann existiert nach Induktionsvoraussetzung ein $N \in \mathbb{N}$ mit $Y_{m1}^2 \cdots Y_{m(k-1)}^2 \leq_M N u_1 \cdots u_{k-1}$. Daraus folgt analog zum Fall $k = 2$ mit $Y_{mk}^2 \leq_M N_k u_k$

für ein $N_k \in \mathbb{N}$, dass

$$Y_{m1}^2 \cdots Y_{m(k-1)}^2 Y_{mk}^2 \leq_M Nu_1 \cdots u_{k-1} Y_{mk}^2 \leq_M NN_k u_1 \cdots u_k$$

und damit $gY_{m1}^2 \cdots Y_{mk}^2 \leq_M N_0 NN_k u_1 \cdots u_k$. □

Damit ist $u := \prod_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (X_j - x_{ij})^2$ eine Ordnungseinheit von $(I, I \cap M)$ und wir können auch hier die reinen Zustände auf $(I, I \cap M, u)$ bestimmen. In Analogie zum Spezialfall $k = 1$ erhalten wir auch hier die Einsetzungen ε_y mit $f(y) \neq 0$ und die zweiten Richtungsableitungen in den Nullstellen von f.

Dazu betrachten wir auch hier zunächst die durch die zweiten Richtungsableitungen in Null gegebenen Zustände auf $(I, I \cap M, u)$. Analog zum Spezialfall sind dies reine Zustände auf $(I, I \cap M, u)$. Die folgende Proposition gilt analog für die anderen Nullstellen $x_2, \ldots, x_k$.

4.12 Proposition. *Sei $\mu = \prod_{j \neq 1} \|x_j\|^2$. Dann ist φ_i definiert durch*

$$\varphi_i(p_1 \cdots p_k) := \frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 p_1 \cdots p_k}{\partial X_i^2}(0)$$

für $p_j \in \mathfrak{m}_j^2$ und $i = 1, \ldots, n$ ein reiner Zustand auf $(I, I \cap M, u)$.

Beweis. Die Abbildungen φ_i sind $\mathbb{R}$-linear und mit der Produktregel für höhere Ableitungen folgt $\varphi_i(u) = \varphi_i(u_1 \cdots u_k) = 1$. Analog zu Proposition 4.9 gilt wieder $\varphi_i(I \cap M) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$, also sind φ_i Zustände auf $(I, I \cap M, u)$. Weiter erhält man analog, dass φ_i reine Zustände auf $(I, I \cap M, u)$ sind. □

4.13 Satz. *Sei $\varphi \in \partial_e S(I, I \cap M, u)$. Dann gilt entweder*

$$(a)\ \exists y \in K_M \setminus \{x_1, \ldots, x_k\} : \forall p \in \mathfrak{m}^2 : \varphi(p) = \frac{p(y)}{\mu} \text{ mit } \mu = \prod_{i=1}^k \|y - x_i\|^2$$

oder

$$(b)\ \exists i \in \{1, \ldots, k\} : \exists v \in S^{n-1} : \forall p \in \mathfrak{m}^2 : \varphi(p) = \frac{\partial_v^2 p(x_i)}{2\mu_i} \text{ mit } \mu_i = \prod_{j, j \neq i} \|x_i - x_j\|^2$$

Beweis. Wir betrachten wieder $\varphi^* \in X(M)$ zu φ. Damit ist $\varphi^* = \varepsilon_y$ für ein $y \in K_M$ nach Bemerkung 1.16. Wir unterscheiden wieder die zwei Fälle aus Satz 3.29:

(a) $\varphi^*(u) > 0$, dann ist mit $\mu := \varphi^*(u) = \prod_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_j - x_{ij})^2 = \prod_{i=1}^k \|y - x_i\|^2$ für ein $y \in K_M \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}$ der Zustand φ gegeben durch $\varphi(p) = \frac{1}{\mu} p(y)$.

(b) $\varphi^*(u) = 0$, dann ist $\varphi^*(g) = g(x_i)$ für ein $i \in \{1, \ldots, k\}$. Damit gilt für festes i die Beziehung $\varphi(gp) = g(x_i)\varphi(p)$ für $g \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ und $p \in I$.

    Sei nun ohne Einschränkung $x_i = x_1$ im Ursprung, also $\mathfrak{m}_1 = (X_1, \ldots, X_n)$ wie im Spezialfall. Dann gilt $\varphi(gp) = g(0)\varphi(p)$ für $g \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ und $p \in I$, also $\varphi|_{\mathfrak{m}_1^3 \mathfrak{m}_2^2 \cdots \mathfrak{m}_k^2} = 0$. Mit $\mu_1 := (u_2 \cdots u_k)(x_1) = \prod_{j \neq 1} \|x_1 - x_j\|^2 = \prod_{j=2}^k \|x_j\|^2 \neq 0$ gilt dann für beliebige $p_i \in \mathfrak{m}_i^2$:

$$\varphi(p_1 \cdots p_k) = \frac{1}{\mu_1}(u_2 \cdots u_k)(0) \cdot \varphi(p_1 \cdots p_k)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\mu_1}\varphi(u_2\cdots u_k p_1\cdots p_k) = \frac{1}{\mu_1}\varphi(p_2\cdots p_k p_1 u_2\cdots u_k) \\
&= \frac{1}{\mu_1}(p_2\cdots p_k)(0)\cdot\varphi(p_1 u_2\cdots u_k). \qquad (8)
\end{aligned}
$$

Damit ist φ durch die Werte $\varphi(p_1 u_2\cdots u_k)$ mit $p_1 \in \mathfrak{m}_1^2$ festgelegt. Sei $p_1 \in \mathfrak{m}_1^2$ dargestellt durch $p_1 = \sum_{i,j} p_{ij}X_iX_j + P$ mit $p_{ij} \in \mathbb{R}$ und $P \in \mathfrak{m}_1^3$. Auch hier können wir durch eine orthogonale Transformation die Hessematrix von p_1 diagonalisieren und somit ohne Einschränkung annehmen, dass $p_{ij} = 0$ für $i \neq j$ ist. Dann gilt mit $\lambda_i := \varphi(X_i^2 u_2\cdots u_k)$, dass

$$\varphi(p_1u_2\cdots u_k) = \sum_{i,j} p_{ij}\varphi(X_iX_ju_2\cdots u_k) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial X_i^2}(0)\lambda_i.$$

Da $X_i^2 u_2\cdots u_k \in M$ für alle $i \in \{1,\ldots,n\}$ ist, gilt wieder $\lambda_i \geq 0$. Ebenso ist $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \varphi(u) = 1$. Dieses eingesetzt in (8) liefert uns

$$\varphi(p_1\cdots p_k) = \frac{1}{\mu_1}(p_2\cdots p_k)(0)\cdot\varphi(p_1u_2\cdots u_k) \quad = \sum_{i=1}^n \lambda_i\frac{1}{2\mu_1}(p_2\cdots p_k)(0)\frac{\partial^2 p_1}{\partial X_i^2}(0).$$

Mit $p_1(0) = 0$ und $\frac{\partial p_1}{\partial X_i}(0) = 0$ ergibt die Produktregel für höhere Ableitungen

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\mu_1}(p_2\cdots p_k)(0)\frac{\partial^2 p_1}{\partial X_i^2}(0) &= \frac{1}{2\mu_1}\left[\frac{\partial^2 p_1}{\partial X_i^2}(0)(p_2\cdots p_k)(0) + \right. \\
&\quad \left. + 2\frac{\partial p_1}{\partial X_i}(0)\frac{\partial(p_2\cdots p_k)}{\partial X_i}(0) + \frac{\partial^2(p_2\cdots p_k)}{\partial X_i^2}(0)p_1(0)\right] \\
&= \frac{1}{2\mu_1}\frac{\partial^2 p_1\cdots p_k}{\partial X_i^2}(0)
\end{aligned}
$$

Also folgt

$$\varphi(p_1\cdots p_k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i\frac{1}{2\mu_1}\frac{\partial^2 p_1\cdots p_k}{\partial X_i^2}(0).$$

Damit ist φ Konvexkomination der Zustände φ_i aus Proposition 4.12, also muss wieder $\varphi = \varphi_i$ für ein $i \in \{1,\ldots,n\}$ sein.

Nach Rücktransformation folgt damit $\varphi(p_1\cdots p_k) = \frac{1}{2\mu_1}\partial_v^2(p_1\cdots p_k)(0)$ für ein $v \in S^{n-1}$ und damit die Behauptung. □

Hiermit ist der Beweis des Darstellungssatzes klar.

Beweis von Satz 4.6. Nach Konstruktion ist $\varphi(f) > 0$ für alle $\varphi \in \partial_e S(\mathfrak{m}^2, \mathfrak{m}^2 \cap M, u)$. Denn für alle $y \in K_M \setminus \{x_1,\ldots,x_k\}$ ist die Einsetzung $\varepsilon_y(f) > 0$. Da $D^2 f(x_i)$ positiv definit ist, ist weiter $\partial_v^2 f(x_i) = v^t(D^2 f(x_i))v$ positiv für alle $v \in S^{n-1}$ und damit $\varphi(f) = \frac{\partial_v^2 f(x_i)}{2\mu_i} > 0$. Somit gilt nach Satz 2.6, dass $f \in \mathfrak{m}^2 \cap M \subset M$. □

Durch die Untersuchung der reinen Zustände auf dem Ideal I haben wir die folgende Charakterisierung erhalten.

Sei M ein quadratischer Modul auf $\mathbb{R}[\bar{X}]$. Seien $\mathfrak{m}_1,\ldots,\mathfrak{m}_k$ endlich viele maximale Ideale zu reellen Punkten $x_1,\ldots,x_k \in \mathbb{R}^n$ mit Ordnungseinheiten $u_i := \sum_{j=1}^n (X_j - x_{ij})^2$ auf

$(\mathfrak{m}_i^2, \mathfrak{m}_i^2 \cap M)$. Dann ist $I := \mathfrak{m}_1^2 \cdots \mathfrak{m}_k^2$ ein Ideal mit Ordnungseinheit $u := u_1 \cdots u_k$ nach Lemma 4.11.

Hierfür besteht nach Satz 4.13 eine Einbettung der reinen Zuständen auf $(I, I \cap M, u)$ in die Menge $K_M \setminus \{x_1, \ldots, x_k\} \cup S^{n-1}$, wenn man linear abhängige Vektoren $v_1, v_2 \in S^{n-1}$ miteinander identifiziert, da diese aufgrund der Symmetrie der Hessematrix die gleichen Zustände induzieren. Dabei ist klar, dass diese Zuordnung injektiv ist.

Umgekehrt erfüllt jeder Zustand φ, welcher zu einem Punkt in $K_M \setminus \{x_1, \ldots, x_k\} \cup S^{n-1}$ gehört schon $\varphi(fp) = \varphi(fu)\varphi(p)$ für alle $f \in A$ und $p \in I$. Nach Satz 3.34 sind alle Zustände mit $\varphi(u^2) \neq 0$, also alle Zustände, welche zu einem Punkt in $K_M \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}$ gehören, reine Zustände auf $(I, I \cap M, u)$ (vom Typ (a) in Satz 3.29).

Lemma 4.12 liefert für jede Nullstelle x_i die Existenz von n reinen Zuständen φ_i vom Typ (b). Diese sind bis auf orthogonale Transformation die einzigen reinen Zustände φ auf $(I, I \cap M, u)$ mit $\varphi(u^2) = 0$, da unter orthogonalen Abbildungen Zustände in Zustände überführt werden und somit Konvexkombinationen von Zuständen erhalten bleiben. Damit liefert jedes $v \in S^{n-1}$ für jede Nullstelle x_i einen reinen Zustand φ auf $(I, I \cap M, u)$. Denn wir erhalten φ durch orthogonale Transformation eines φ_i aus Lemma 4.12. Wäre nun φ Konvexkombination zweier Zustände auf $(I, I \cap M, u)$, so wäre φ_i eine Konvexkombination der rücktransformierten Zustände im Widerspruch dazu, dass φ_i rein ist.

Da linear abhängige $v_1, v_2 \in S^{n-1}$ den gleichen Zustand induzieren, betrachten wir zwei Vektoren in S^{n-1} als äquivalent, wenn sie linear abhängig sind. Die Menge dieser Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit $S^{n-1}_\sim$ und erhalten somit eine Bijektion zwischen den reinen Zuständen auf $(I, I \cap M, u)$ und der Menge $K_M \setminus \{x_1, \ldots, x_k\} \cup S^{n-1}_\sim$.

Anhang A

Lokal-Global-Kriterium für nichtnegative Polynome

Das Lokal-Global-Kriterium von Scheiderer für Präordnungen [Sch03, Cor.3.13] oder quadratische Moduln [Scha, Thm.2.8] stellt hinreichende zusätzliche Forderungen an das Verhalten eines nichtnegativen Polynoms in einer Umgebung um seine Nullstellen. Unter gewissen Voraussetzungen gilt für ein nichtnegatives Polynom f, dass f genau dann im quadratischen Modul M liegt, wenn f für jede Nullstelle x im quadratischen Modul liegt, welcher durch Komplettierung bezüglich des maximalen Ideals von x entsteht.

Wir zeigen dieses Kriterium hier lediglich für Präordnungen T der Stufe $2m$, da wir dieses dann aus Satz 3.36 folgern können. Für den allgemeinen Fall eines quadratischen Moduls sei auf [Scha] verwiesen.

Dazu benötigen wir einige Vorbemerkungen und Bezeichnungen [PD01, Kap.7]. Nach Zorn's Lemma ist jeder nichttriviale Modul M der Stufe $2m$ in einem maximalen Modul der Stufe $2m$ enthalten. Diese sind $2m$-Semiordnungen und daher ist jeder Modul der Stufe $2m$ in einer $2m$-Semiordnung S enthalten. Dabei ist eine $2m$-Semiordnung S ein Modul der Stufe $2m$ mit $-1 \notin S$, für den $S \cup -S = A$ und $S \cap -S = \mathfrak{p}$ ein Primideal ist. Wir bezeichnen die Menge der $2m$-Semiordnungen von A, welche M enthalten, mit

$$\mathcal{Y}_M^{2m} := \{S \subset A \mid S \text{ } 2m\text{-Semiordnung}\,, M \subset S\}.$$

Wir setzen $\mathcal{Y}_M^2 =: \mathcal{Y}_M$. Analog bezeichnen wir die Menge aller Anordnungen von A mit $\mathcal{X}(A)$ und die Menge der Anordnungen von A, welche die Präordnung T enthalten, mit

$$\mathcal{X}_T := \{P \subset A \mid P \in \mathcal{X}(A), T \subset P\}.$$

Sei I ein Ideal von A, dann ist das *Radikal von I* gegeben durch $\sqrt{I} = \bigcap_{I \subset \mathfrak{p}} \mathfrak{p}$, wobei $\mathfrak{p}$ Primideale von A sind.

Mit dem Nullstellensatz von Jacobi für Moduln höherer Stufe [Jac99] können wir nun eine äquivalente Darstellung des Radikals von $\operatorname{supp} M$ zeigen.

A.1 Satz (Jacobi). *Sei M ein Modul der Stufe $2m$. Dann sind äquivalent:*

i) $f = 0$ *auf* $\mathcal{Y}_M^{2m}$*, d.h.* $f \in S \cap -S$ *für alle* $S \in \mathcal{Y}_M^{2m}$

ii) $-f^{2mN} = t$ *für ein* $N \in \mathbb{N}$ *und* $t \in M$

A.2 Lemma. *Sei A kommutativer Ring mit 1 und M ein Modul der Stufe $2m$. Dann gilt*

$$\sqrt{\operatorname{supp} M} = \bigcap_{P \in \mathcal{Y}_M^{2m}} \operatorname{supp} P$$

Beweis. Es gilt für einen Modul P der Stufe $2m$ mit $M \subset P$, dass $\operatorname{supp} M \subset \operatorname{supp} P$. Damit ist die Inklusion „$\subset$“ klar, denn es gilt $\sqrt{\operatorname{supp} M} = \bigcap_{\operatorname{supp} M \subset \mathfrak{p}} \mathfrak{p} \subset \bigcap_{P \in \mathcal{Y}_M^{2m}} \operatorname{supp} P$.
„$\supset$“ Sei $g \in \bigcap_{P \in \mathcal{Y}_M^{2m}} \operatorname{supp} P$, d.h. $g \in \operatorname{supp} P$ für alle $P \in \mathcal{Y}_M$. Damit ist $g = 0$ auf $\mathcal{Y}_M^{2m}$. Mit Satz A.1 folgt, dass $-g^{2mN} \in M$ für ein $N \in \mathbb{N}$. Da $g^{2mN} \in A^{2m} \subset M$, ist damit $g^{2mN} \in \operatorname{supp} M$. □

A.3 Bemerkung. Es gilt $\sqrt{\operatorname{supp}(M + (f))} = \sqrt{\operatorname{supp}(M + (f^{2m}))}$, denn:

$$\begin{aligned} P \in \mathcal{Y}_{M+(f)}^{2m} &\Leftrightarrow P \in \mathcal{Y}_M^{2m} \text{ und } (f) \subset \operatorname{supp} P \\ &\Leftrightarrow P \in \mathcal{Y}_M^{2m} \text{ und } (f^{2m}) \subset \operatorname{supp} P \Leftrightarrow P \in \mathcal{Y}_{M+(f^{2m})}^{2m}. \end{aligned}$$

Dabei ist lediglich die zweite Äquivalenz zu zeigen, der Rest ist Definition.
Die Implikation „$\Rightarrow$“ ist klar, da $(f^{2m}) \subset (f)$.
Die Implikation „$\Leftarrow$“ folgt daraus, dass mit $f^{2m} \in \operatorname{supp} P$ auch schon $f \in \operatorname{supp} P$, da $\operatorname{supp} P$ ein Primideal ist.

Wir können hiermit den folgenden Darstellungssatz zeigen, welcher uns ermöglicht, das Lokal-Global-Kriterium zu beweisen.

A.4 Satz. *Sei A ein noetherscher Ring. Weiter sei T archimedische Präordnung der Stufe $2m$ und $f \in A$ nichtnegativ bezüglich T, d.h. $\varphi(f) \geq 0$ für alle $\varphi \in X(T)$. Ist $f \in T + J$ für jedes Ideal J von A mit $\sqrt{J} = \sqrt{\operatorname{supp}(T + (f))}$, so ist $f \in T$.*

Die Aussage gilt mit analogem Beweis für quadratische Moduln M [Scha, Prop.2.4], indem man ein ähnliches Resultat wie in Satz 3.36 für quadratische Moduln anwendet [Scha, Prop.2.3]. Da wir aber Satz 3.36 anwenden wollen, beschränken wir uns hier auf den einfacheren Fall.

Beweis. Es gilt $\sqrt{\operatorname{supp}(T + (f))} = \sqrt{\operatorname{supp}(T + (f^{2m}))}$ nach Bemerkung A.3. Wir wählen nun eine Familie $(g_\lambda)_\lambda \subset \operatorname{supp}(T + (f^{2m}))$ so, dass $\sqrt{\operatorname{supp}(T + (f))} = \sqrt{(f) + (g_\lambda)_\lambda}$ ist. Damit gilt für $J = (f^{2m}, (f + g_\lambda)_\lambda^{2m})$, dass $\sqrt{J} = \sqrt{\operatorname{supp}(T + (f))}$, also $f \in T + J$. Denn „$\subset$“ ist klar, da $(f^{2m}) \subset (f)$ und $(f + g_\lambda)^{2m} \in (f) + (g_\lambda)$. Umgekehrt ist $f^{2m} \in (f^{2m})$ und damit $f \in \sqrt{J}$; weiter ist $(f + g_\lambda)^{2m} \in J$ also $(f + g_\lambda) \in \sqrt{J}$ und wegen $f \in \sqrt{J}$ ist damit $g_\lambda \in \sqrt{J}$.

Da A ein noetherscher Ring ist, genügen schon endlich viele $g_1, \ldots, g_r$ der $(g_\lambda)_\lambda$, so dass $f \in T + (f^{2m}, (f + g_1)^{2m}, \ldots, (f + g_r)^{2m})$ ist.

Setzt man $T_1 := T + f^{2m} + (f + g_1)^{2m} + \cdots + (f + g_{r-1})^{2m}$. Dann ist T_1 als Obermenge von T ein archimedischer T-Modul. Da $g_r \in T + (f^{2m}) \subset T_1$ ist, gilt $\varphi(f + g_r) \geq 0$ für alle $\varphi \in S(A, T_1, 1) \subset S(A, T, 1)$. Es gilt also $f + g_r \in T_1 + (f + g_r)^{2m}$ und $\varphi(f + g_r) \geq 0$ für alle $\varphi \in X(T_1)$. Wendet man nun Satz 3.36 auf $f + g_r$ an, erhält man $f + g_r \in T_1$. Wegen $g_r \in \operatorname{supp} T_1$ ist damit $f \in T_1 = T + f^{2m} + \cdots + (f + g_{r-1})^{2m}$. Durch Iteration der Argumentation erhält man schließlich $f \in T$. □

Da wir für das Lokal-Global-Kriterium die Komplettierung eines Ringes benötigen, sei hier noch einmal kurz daran erinnert [Jac89, Kap.5.17].

Sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von A. Wir betrachten die $\mathfrak{m}$-adische Topologie $\tau_\mathfrak{m}$ auf A, welche durch die offenen Mengen $U(x,k) := x + \mathfrak{m}^k$ für $x \in A$ und $k \in \mathbb{N}$ erzeugt wird. Damit ist eine Folge $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ genau dann Nullfolge in A, wenn ein $l_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $l \geq l_0$ stets $x_l \in \mathfrak{m}^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist. Definiert man eine Cauchyfolge $(x_l)_l$ dadurch, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $l_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $l, m \geq l_0$ dann $x_l - x_m \in \mathfrak{m}^k$ gilt, so kann man A in üblicher Weise komplettieren, indem man alle Cauchyfolgen modulo Nullfolgen betrachtet.

Es bezeichne $\widehat{T}_\mathfrak{m}$ die von T im komplettierten lokalen Ring $\widehat{A}_\mathfrak{m}$ erzeugte Präordnung. Dann gilt das folgende Lokal-Global Kriterium für Präordnungen [Sch03, Cor.3.16].

A.5 Satz (Lokal-Global-Kriterium)**.** *Sei A ein noetherscher Ring und T eine archimedische Präordnung der Stufe $2m$. Sei $f \in A$ mit $\varphi(f) \geq 0$ für alle $\varphi \in X(T)$. Ist für alle $P \in \mathcal{X}_{T+(f)}$ stets* $\operatorname{supp} P$ *ein maximales Ideal, dann gilt: Ist $f \in \widehat{T}_{\operatorname{supp} P}$ für alle $P \in \mathcal{X}_{T+(f)}$, so ist $f \in T$.*

Eine entsprechende Formulierung für quadratische Moduln befindet sich wie oben erwähnt in [Scha, Thm.2.8]. Diese erhält man, indem man die Präordnung T durch einen quadratischen Modul M und die Menge $\mathcal{X}_{T+(f)}$ durch $\mathcal{Y}_{M+(f)}$ ersetzt.

Beweis. Es gilt nach Lemma A.2 und Bemerkung A.3

$$\sqrt{\operatorname{supp}(T + (f^{2m}))} = \sqrt{\operatorname{supp}(T + (f))} = \bigcap_{P\in\mathcal{X}_{T+(f)}} \operatorname{supp} P.$$

Nach [Scha, Lem.2.7] ist die Menge $\{\operatorname{supp} P \mid P \in \mathcal{X}_{T+(f)}\}$ endlich. Da nach Voraussetzung $\operatorname{supp} P$ für jedes $P \in \mathcal{X}_{T+(f)}$ maximal ist, gilt damit

$$\sqrt{\operatorname{supp}(T + (f^{2m}))} = \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_r = \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_r$$

für endlich viele maximale Ideale $\mathfrak{m}_i$. Für diese gilt nach Voraussetzung $f \in \widehat{T}_{\mathfrak{m}_i}$, also $f \in T + \mathfrak{m}_i^N$. Mit dem Chinesischen Restsatz folgt dann $\bigcap(T + \mathfrak{m}_i^N) = T + \bigcap \mathfrak{m}_i^N$, da nach Bemerkung 1.18 alle $\mathfrak{m}_i^N$ für festes N paarweise teilerfremd sind. Damit ist $f \in T + J$ für jedes Ideal J von A mit $\sqrt{J} = \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_r = \sqrt{\operatorname{supp}(T + (f^{2m}))}$. Nach Satz A.4 ist damit $f \in T$. □

Interpretiert man diesen Satz geometrisch, so ergibt sich das folgende Korollar [Sch03, Cor.3.17]. Dabei sei $\widehat{T}_{x_i}$ gegeben durch $\widehat{T}_{\mathfrak{m}_i}$ mit $\mathfrak{m}_i = \{g \in \mathbb{R}[\bar{X}] \mid g(x_i) = 0\}$.

A.6 Korollar. *Sei T eine endlich erzeugte Präordnung im Polynomring $\mathbb{R}[\bar{X}]$ und K_T kompakt. Weiter sei $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ nichtnegativ auf K_T und f besitze nur endlich viele Nullstellen $x_1, \ldots, x_k$ in K_T. Gilt dann $f \in \widehat{T}_{x_i}$ für $i = 1, \ldots, k$, dann ist $f \in T$.*

Beweis. Da K_T kompakt und T endlich erzeugt ist, ist T nach Satz 1.10 archimedisch. Sei $\mathfrak{m}_i$ das zu der Nullstelle x_i gehörende maximale Ideal $\mathfrak{m}_i = \{g \in \mathbb{R}[\bar{X}] \mid g(x_i) = 0\}$. Weiter sei T durch die endlich vielen Polynome $h_1, \ldots, h_s \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ erzeugt. Dann gilt auch hier $\sqrt{\operatorname{supp}(T + (f))} = \bigcap_{P\in\mathcal{X}_{T+(f)}} \operatorname{supp} P = \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_r$. Denn zunächst erhält man für Anordnungen P, Q von $\mathbb{R}[\bar{X}]$, dass

$$\begin{aligned} P \in \mathcal{X}_{T+(f)} &\Leftrightarrow T \subset P \text{ und } f \in \operatorname{supp}(P) \\ &\Leftrightarrow h_1, \ldots, h_s \in P \text{ und } f(P) = 0 \\ &\Leftrightarrow P \in \{Q \in \mathcal{X}(\mathbb{R}[\bar{X}]) \mid h_1(Q) \geq 0, \ldots, h_s(Q) \geq 0, f(Q) = 0\}. \end{aligned}$$

Wir können jede Anordnung $Q \in \mathcal{X}(\mathbb{R}[\bar{X}])$ als Äquivalenzklasse im $\mathbb{R}^*$ identifizieren [PD01, Kap.4.5]. Da f nur endlich viele Nullstellen in K_T besitzt, gibt es nur endlich viele $x \in \mathbb{R}^n$ mit $h_1(x) \geq 0, \dots, h_s(x) \geq 0, f(x) = 0$, nämlich genau die Nullstellen $x_1, \dots, x_k$ von f. Mit dem Tarski-Prinzip [PD01, Thm.2.1.10] folgt dann, da $\mathbb{R}^*$ reell abgeschlossen ist, dass es in $\mathbb{R}^*$ genauso viele Punkte P gibt, welche $h_1(P) \geq 0, \dots, h_s(P) \geq 0, f(P) = 0$ erfüllen. Da $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^*$, sind es also wieder genau die Nullstellen $x_1, \dots, x_k$ von f beziehungsweise die durch $x_1, \dots, x_k$ induzierten Anordnungen $P_i := \{g \in \mathbb{R}[\bar{X}] \mid g(x_i) \geq 0\}$. Damit gilt also

$$\begin{aligned} P \in \mathcal{X}_{T+(f)} &\Leftrightarrow P = \{g \in \mathbb{R}[\bar{X}] \mid g(x_i) \geq 0\} \text{ für ein } i \in \{1, \dots, k\} \\ &\Leftrightarrow \operatorname{supp}(P) = \{g \in \mathbb{R}[\bar{X}] \mid g(x_i) = 0\} = \mathfrak{m}_i \text{ für ein } i. \end{aligned}$$

Mit analoger Argumentation wie in Satz A.5 folgt dann $f \in T$. □

Auch hier gilt eine entsprechende Aussage für quadratische Moduln [Scha, Prop.3.4], wobei hier weitere Voraussetzungen auftreten, da im Gegensatz zu $P \in \mathcal{X}_{M+(f)}$ im Allgemeinen nicht für alle $P \in \mathcal{Y}_{M+(f)}$ stets $\operatorname{supp} P$ ein maximales Ideal ist.

Mit Korollar A.6 können wir den Darstellungssatz 4.6 für den Fall einer Präordnung alternativ beweisen.

Die Komplettierung des Polynomrings $\mathbb{R}[\bar{X}]$ bezüglich einer Nullstelle x von f ist der Ring $\mathbb{R}[[\bar{X}]]$ der formalen Potenzreihen [Jac89, Kap.5.17].

Indem wir die Wurzelfunktion formal entwickeln, finden wir unter den gegebenen Voraussetzungen eine Darstellung von f in $\mathbb{R}[[\bar{X}]]^2 \subset \widehat{T}_{x_i}$ für $i = 1, \dots, k$ wie folgt.

Sei $x = x_i$ für ein $i \in \{1, \dots, k\}$ fest gewählt und ohne Einschränkung im Ursprung. Da die Nullstelle nach Voraussetzung im Inneren von K_T liegt und $f \geq 0$ auf K_T ist, enthält f keine linearen Terme. Da $D^2 f(0)$ positiv ist, besitzt die zugehörige quadratische Form nur positive Eigenwerte und wir können somit ohne Einschräkung f darstellen durch $f = X_1^2 + \cdots + X_n^2 + h$ für ein $h \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ mit $\deg h \geq 3$. Hierfür gilt das folgende Lemma.

A.7 Lemma. *Ein Polynom $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ der Gestalt $f = X_1^2 + \cdots + X_n^2 + h$ mit $\deg h \geq 3$ lässt sich darstellen als Summe von Polynomen $f_{a,m} := X_1^2 + \cdots + X_m^2 + aX_1 \dots X_m$ mit $m \geq 3$ und $a \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Man kann jedes normierte Monom vom Grad $m \geq 3$ durch $f_{1/2,m} - f_{-1/2,m}$ erzeugen. Damit ergibt sich durch geeignete Wahl von a und Summation jedes Polynom $h \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ mit $\deg h \geq 3$. Da $f_{0,n} = X_1^2 + \cdots + X_n^2$, erhält man damit die Behauptung. □

Nach Lemma A.7 genügt es damit $g = X_1^2 + \cdots + X_m^2 + aX_1 \dots X_m \in \sum \mathbb{R}[[\bar{X}]]^2$ für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ und $m \geq 3$ zu zeigen. Mit $U_i := \prod_{j \neq i} X_j$ gilt

$$g = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} X_i + \frac{a}{m} U_i \right)^2 + \frac{3}{4} \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{4a^2}{3m^2} \sum_{i=1}^{n} U_i^2 \right).$$

Da $\sqrt{1+x} = \sum \binom{1/2}{l} x^l$ in $\mathbb{R}[[\bar{X}]]$, folgt für $c \in \mathbb{R}$ und $i \neq j$, dass

$$X_i^2 + cU_j^2 = X_i^2 \big(1 + c \prod_{k \neq i,j} X_k^2\big) = \left(X_i \sum_{l=0}^{\infty} \binom{1/2}{l} \big(c \prod_{k \neq i,j} X_k\big)^l \right)^2 \in \mathbb{R}[[\bar{X}]]^2.$$

Also gilt $g \in \sum \mathbb{R}[[\bar{X}]]^2$ und damit $f \in \sum \mathbb{R}[[\bar{X}]]^2 \subset \widehat{T}_x$. Mit Korollar A.6 folgt dann $f \in T$.

Quellen und Referenzen

[BCR84] Ch. Berg, J.P.R. Christensen, and P. Ressel, *Harmonic analysis on semigroups. Theory of positive definite and related functions*, Graduate Texts in Mathematics, 100. New York etc.: Springer-Verlag, 1984.

[BLP66] F.F. Bonsall, J. Lindenstrauss, and R.R. Phelps, *Extreme positive operators on algebras of functions*, Math. Scand. **18** (1966), 161–182.

[dAT01] V. de Angelis and S. Tuncel, *Handelman's theorem on polynomials with positive multiples*, Marcus, Brian (ed.) et al., Codes, systems, and graphical models, NY: Springer. IMA Vol. Math. Appl.,**123**, (2001), 439-445.

[EHS80] E.G. Effros, D. Handelman, and C.-L. Shen, *Dimension groups and their affine representations*, Amer. J. Math. **102** (1980), 385–407.

[GH76] K.R. Goodearl and D. Handelman, *Rank functions and K_0 of regular rings.*, J. pure appl. Algebra **7** (1976), 195–216.

[Goo86] K.R. Goodearl, *Partially ordered abelian groups with interpolation*, Mathematical Surveys and Monographs, 20. Providence, R.I.: American Mathematical Society (AMS), 1986.

[Han85] D. Handelman, *Positive polynomials and product type actions of compact groups*, Mem. Am. Math. Soc. **320** (1985).

[Han88] ———, *Representing polynomials by positive linear functions on compact convex polyhedra*, Pac. J. Math. **132** (1988), no. 1, 35–62.

[Jac89] N. Jacobson, *Basic Algebra II*, Freeman-Verlag, 1989.

[Jac99] T. Jacobi, *Über die Darstellung strikt positiver Polynome auf semialgebraischen Kompakta*, Doktorarbeit, Universität Konstanz, 1999.

[Jac01] ———, *A representation theorem for certain partially ordered commutative rings*, Math. Z. **237** (2001), no. 2, 259–273.

[KMS] S. Kuhlmann, M. Marshall, and N. Schwartz, *Positivity, sums of squares and the multi-dimensional moment problem II*, eingereicht.

[Kri64] J.-L. Krivine, *Quelques propriétés des préordres dans les anneaux commutatifs unitaires*, C. R. Acad. Sci. Paris **258** (1964), 3417–3418.

[Mar] M. Marshall, *Representations of non-negative polynomials having finitely many zeros*, to appear in Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.

[PD01] A. Prestel and C.N. Delzell, *Positive polynomials. From Hilbert's 17th problem to real algebra*, Springer Monographs in Mathematics, Berlin: Springer-Verlag, 2001.

[Put93] M. Putinar, *Positive polynomials on compact semi-algebraic sets.*, Indiana Univ. Math. J. **42** (1993), no. 3, 969–984.

[Scha] C. Scheiderer, *Distinguished representations of non-negative polynomials*, preprint.

[Schb] ———, *Positivity and sums of squares: a guide to some recent results*, preprint.

[Schc] M. Schweighofer, *Certificates for nonnegativity of polynomials with zeros on compact semialgebraic sets*, erscheint in Manuscripta Mathematica.

[Sch91] K. Schmüdgen, *The K-moment problem for compact semi-algebraic sets*, Math. Ann. **289** (1991), 203–206.

[Sch03] C. Scheiderer, *Sums of squares on real algebraic curves*, Math. Z. **245** (2003), no. 4, 725–760.

[Wal99] W. Walter, *Analysis 1*, Springer Grundwissen Mathematik, Berlin: Springer-Verlag, 1999.