Mathematisches Institut
der Universität Konstanz
S. Kuhlmann, M.Carl

WS 15/16
19.10.2015
Zettel 1

Übungen zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 1: Überprüfen Sie bei den folgenden Strukturen, ob es sich um eine (abelsche) Gruppe handelt. Weisen Sie die gültigen Gesetze kurz nach und geben Sie im anderen Fall ein Gegenbeispiel an.

a) $(\mathbb{Z}, +)$, wobei $+$ die gewöhnliche Addition ganzer Zahlen bezeichnet.
b) $(\mathbb{Z}, \cdot)$, wobei $\cdot$ die gewöhnliche Multiplikation ganzer Zahlen bezeichnet.
c) $(\mathbb{R}_+, \circ)$, wobei $a \circ b = a^b$. $\mathbb{R}_+$ ist die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen.

Aufgabe 2:
(a) Füllen Sie die folgende Verknüpfungstafel so aus, dass sie eine abelsche Gruppe repräsentiert:

$*$	0	1	2	3	4
0	1	2	?	?	?
1	?	?	?	?	?
2	?	?	?	?	?
3	?	?	?	?	?
4	0	?	?	?	?

(b) Ist die Lösung in (a) eindeutig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3: Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe mit neutralem Element e, ferner $e_1, e_2, e_3 \in G$ so, dass $e_1 \cdot x = e_2 \cdot x = x \cdot e_3 = x$ für alle $x \in G$. Außerdem seien $a, b, c \in G$ so, dass $a \cdot b = a \cdot c = e$. Zeigen Sie:

a) $e_1 = e_2 = e_3$
b) $b \cdot a = e$
c) $b = c$

Aufgabe 4: Es sei X eine Menge. Ist $A \subseteq X$, so bezeichnen wir mit $\bar{A}$ das Komplement von A in X, d.h. die Menge $\{x \in X : x \notin A\}$.

(a) Zeigen Sie: Für jedes $A \subseteq X$ ist $\bar{\bar{A}} = A$.
(b) Zeigen Sie: Für alle $A, B \subseteq X$ ist $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ und $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.
(c) Bestimmen Sie alle $A, B \subseteq X$ mit $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Finden Sie eine Menge X zusammen mit einer Funktion $\oplus : X \times X \to X$, so dass $(X, \oplus)$ nicht assoziativ ist, aber alle übrigen Gesetze einer kommutativen Gruppe erfüllt.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.

Abgabe bis zum 26.10.2015, 12.30. Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in das Postfach Ihres Tutors im Gang F, 4. Etage.