Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl

WS 15/16
21.12.2015
Zettel 10

Übungen zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 1: Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n$. $X \subseteq V$ heißt minimal erzeugend, falls $\mathrm{span}(X) = V$ und $\mathrm{span}(X \backslash \{y\}) \neq V$ für alle $y \in X$. $X \subseteq V$ heißt maximal linear unabhängig, falls X linear unabhängig und $X \cup \{y\}$ linear abhängig für alle $y \in V \backslash X$. Zeigen Sie:
(a) Ist $X \subseteq V$ eine linear unabhängige Menge mit n Elementen, so ist X Basis von V.
(b) Ist $X \subseteq V$ so, dass $\mathrm{span}(X) = V$, so existiert $Y \subseteq X$ so, dass Y Basis von V ist.
(c) Hat $X \subseteq V$ n Elemente und ist $\mathrm{span}(X) = V$, so ist X Basis von V.
(d) Die folgenden Aussagen sind äquivalent für jedes $X \subseteq V$:

- (1) X ist maximal linear unabhängig.
- (2) X ist minimal erzeugend.
- (3) X ist Basis von V.

Aufgabe 2: Wir betrachten $\mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$, die Menge der Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{F}_2$. Zu $x \in \mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$ definieren wir $\mathrm{supp}(x) := \{i \in \mathbb{N} | x(i) = 1\}$, genannt Support von x. $\mathbb{F}_2^{<\mathbb{N}}$ sei die Menge der Elemente von $\mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$ mit endlichem Support. Zeigen Sie:
(a) $\mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$ bildet zusammen mit der komponentenweisen Addition und skalaren Multiplikation einen Vektorraum über $\mathbb{F}_2$. Ferner ist $\mathbb{F}_2^{<\mathbb{N}}$ Unterraum von $\mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$.
(b) $\mathbb{F}_2^{<\mathbb{N}}$ besitzt keine endliche Basis als $\mathbb{F}_2$-Vektorraum.
(c) Für $i \in \mathbb{N}$ sei $f_i(j) := \delta_{ij}$. Dann ist $\{f_i | i \in \mathbb{N}\}$ eine Basis von $\mathbb{F}_2^{<\mathbb{N}}$.

Aufgabe 3: Ist K ein Körper, $A \in Mat_{n\times n}(K)$, so heißt A^τ, gegeben durch $A^\tau_{ij} = A_{ji}$ die Transponierte von A. Zeigen Sie: A ist invertierbar gdw. die Transponierte von A invertierbar ist und es gilt: $(A^\tau)^{-1} = (A^{-1})^\tau$.

Aufgabe 4: Es sei W der durch die Vektoren

$$\alpha_1 := (1, 2, 2, 1)$$
$$\alpha_2 := (0, 2, 0, 1)$$
$$\alpha_3 := (-2, 0, -4, 3)$$

aufgespannte Unterraum von $\mathbb{R}^4$.
Außerdem setzen wir:

$$\alpha_1' := (1,0,2,0)$$
$$\alpha_2' := (0,2,0,1)$$
$$\alpha_3' := (0,0,0,3)$$

Und ferner $B := (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $B' := (\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'\}$.
(a) Zeigen Sie: B und B' sind Basen von W.
(b) Sei $\beta = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in W$. Was sind die Koordinaten von β relativ zur (angeordneten) Basis $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$?
(c) Zu $\beta \in W$ sei X die Koordinatenmatrix von β relativ zu B und X' die Koordinatenmatrix von β relativ zu B'. Finden Sie $P \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$ so, dass $X = PX'$ für jedes solche β.

Zusatzaufgabe für kulinarisch Interessierte: Es sei
$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -77\frac{1}{2} \\ 205 \\ 92\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A^{-1}v$. Ferner sei d die Anzahl der Lösungen für $Ax = 0$, $3e$ die Dimension des durch die Spalten von A aufgespannten Unterraumes von $\mathbb{R}^3$ und f die Anzahl der Paare $\{p_1, p_2\}$, wobei p_1 und p_2 Primzahlen sind und $p_1 + 1 = p_2$.
Geben Sie nun b Gramm Butter, e Eier, c Gramm Zucker und f Päckchen Vanillinzucker mit d EL Wasser in eine Schüssel und schlagen Sie das Gemisch schaumig. Fügen Sie dabei a Gramm Mehl hinzu. Rollen Sie den Teig glatt aus, stechen Sie Formen heraus und backen Sie sie im vorgeheizten Backofen bei ca. 150 Grad zwischen 10 und 14 Minuten lang. Kosten Sie das Ergebnis.
(2 Punkte zusätzlich, wenn Sie frische, nach diesem Rezept hergestellte Plätzchen ins erste Tutorium nach der Vorlesungspause mitbringen.)

Weitere Aufgaben:

WA1: Sei G eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung $\circ : G \times G \to G$ und einem neutralen Element 0. Außerdem gelte $a \circ x = a \circ y \to x = y$ und $x \circ a = y \circ a \to x = y$ für alle a,x,y aus G.
(a) Zeigen Sie: Ist G endlich, so ist dass $(G, \circ)$ eine Gruppe ist.
(b) Finden Sie ein Beispiel für ein unendliches $(G, \circ)$, das keine Gruppe ist.

WA2: Sei K ein Körper. In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass die Menge der Lösungen eines homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$ mit
$A \in Mat_{n\times n}(K)$ einen Unterraum des K-Vektorraumes K^n bildet. Zeigen Sie nun umgekehrt: Ist V ein K-Vektorraum mit Unterraum W, so existiert eine Matrix A_W so, dass W der Lösungsraum von $A_W x = 0$ ist.

WA3: Zeigen Sie, dass die folgenden Vektoren $f, g, h \in Fkt(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$ sind:
(a) $f(x) = 2^x$, $g(x) = sin(x)$, $h(x) = x^2$
(b) $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2^{x^2}$, $h(x) = x$
(c) $f(x) = 2^2$, $g(x) = sin(x)$, $h(x) = cos(x)$

WA4: Sei $A = (a_{ij})$ reelle $n \times n$-Matrix, so dass $\Sigma_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|$ für $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Zeigen Sie, dass A invertierbar ist.

WA5: Seien $p \in \mathbb{P}$ und $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\frac{a}{b} = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k}$. Zeige:

(a) Es ist p ein Teiler von a, falls $p \neq 2$.

(b) Es ist p^2 ein Teiler von a, falls $p \notin \{2, 3\}$.[1]

WA6: Es sei V eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie: Es existiert höchstens eine Abbildung $\cdot : \mathbb{Q} \times V \to V$ so, dass V mit $\cdot$ als Skalarmultiplikation ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum wird. Finden Sie ein V derart, dass kein solches $\cdot$ existiert.

WA7: Es sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie (mit Beweis!) alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ so, dass $AA^t = 0_{n\times n}$. Formulieren Sie eine allgemeinere Vermutung und beweisen Sie sie.

WA8:
(a) Es seien K und F Körper und $\cdot : K \times F \to F$ eine Abbildung so, dass $(F, +_F)$ mit $\cdot$ als Skalarmultiplikation ein K-Vektorraum wird. Zeigen Sie, dass $\mathrm{char}(K) = \mathrm{char}(F)$.
(b) Gibt es einen Körper K und eine Abbildung $\cdot : K \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ so, dass $(\mathbb{Z}, +)$ durch $\cdot$ zu einem K-Vektorraum wird? Beweisen Sie Ihre Antwort!

Frohe Weihnachten und einen guten Start ins Jahr 2016!

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Als volle Punktzahl werden bei diesem Zettel, wie üblich, 40 Punkte gewertet. Die 'weiteren Aufgaben' gehen mit insgesamt maximal 40 Punkten in die Wertung ein. Die maximal erreichbare Punktzahl bei diesem Zettel ist also 90 von 40.

Abgabe bis zum 11.01.2016, 12.30. Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in das Postfach Ihres Tutors im Gang F, 4. Etage.

[1] **Hinweis:** Zeige $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ und verwende für Teil (b) dieses Ergebnis geschickt.