Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl

WS 15/16
11.01.2016
Zettel 11

Übungen zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 1: Sei K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$.

(a) Sei ferner $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$. Wir definieren $U_A : K^m \to K^n$ durch $U_A(\alpha) = \alpha A$. Zeigen Sie, dass U_A für jedes A linear ist und finden Sie die Matrixdarstellung von U_A bezüglich der Standardbasen von K^m und K^n.

(b) Sei $\mathbb{B}_1 := \{(0,2,1),(0,1,2),(1,0,1)\}$ und $\mathbb{B}_2 := \{(-1,1,1),(-2,0,3),(0,3,2)\}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{B}_1$ und $\mathbb{B}_2$ Basen von $\mathbb{R}^3$ sind und bestimmen Sie die Matrixdarstellung der Identitätsfunktion $id : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch $id(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$, bezüglich der Basen $\mathbb{B}_1$ und $\mathbb{B}_2$.

Aufgabe 2: Entscheiden Sie für die jeweiligen Relationen, ob sie reflexiv, transitiv, symmetrisch sind und ob es sich um eine Äquivalenzrelation handelt. Ist R eine Relation auf einer Menge M, $x, y \in M$, so schreiben wir $R(x, y)$ für $(x, y) \in R$.

(a) Sei K ein Körper, R auf $Mat_{n\times n}(K)$ definiert durch $R(M, N)$ gdw. M und N ähnlich.

(b) Sei K ein Körper, R auf $Mat_{n\times n}(K)$ definiert durch $R(M, N)$ gdw. M und N zeilenäquivalent.

(c) Sei R definiert auf $\mathbb{N}$ durch $R(a, b)$ gdw. $a|b$.

(d) $R_m(a, b)$ gdw. a und b bei Division durch m denselben Rest lassen. (Hinweis: Zeigen Sie, dass $R_m(a, b)$ gdw. $m|(a - b)$).

(e) Sei $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die Menge der stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Zu $f_1, f_2 \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ gelte $R(f_1, f_2)$ gdw.

$$\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 (y > x \implies \exists z \in [y, y+ \in] f_1(z) = f_2(z))$$

Aufgabe 3: Es sei A eine beliebige nichtleere Menge, $R \subseteq A \times A$ eine Relation auf A.

(a) Sei R Äquivalenzrelation. Zu $x \in A$ heißt die Menge $[x]_R := \{y \in A : R(x, y)\}$ die Äquivalenzklasse von x unter R. Zeigen Sie, dass für $x, y \in A$ entweder $[x]_R = [y]_R$ oder $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$ gilt. Zeigen Sie weiter, dass $A = \bigcup_{x\in A}[x]_R$.

(b) Zeigen Sie umgekehrt: Ist I eine Menge und sind $\{A_\iota | \iota \in I\}$ nichtleere Teilmengen von A derart, dass $\iota \neq \delta \implies A_\iota \cap A_\delta = \emptyset$ für alle $\iota, \delta \in I$ und $A = \bigcup_{\iota\in I} A_\iota$, so ist das durch

$$R(x, y) \text{ gdw. } \exists \iota \in I(\{x, y\} \subseteq A_\iota)$$

gegebene R eine Äquivalenzrelation.

Aufgabe 4: Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und V, W jeweils n-dimensionale K-Vektorräume, $T : V \to W$ linear. Wir betrachten folgende Aussagen:

1. T ist invertierbar
2. T ist regulär
3. $\mathrm{Im}(T) = W$.
4. Ist $\{\beta_1, ..., \beta_n\}$ eine beliebige Basis von V, so ist $\{T(\beta_1), ..., T(\beta_n)\}$ Basis von W.
5. Es existiert eine Basis $\{\beta_1, ..., \beta_n\}$ von V, so dass $\{T(\beta_1), ..., T(\beta_n)\}$ Basis von W ist.

In der Vorlesung wurde gezeigt: (1) $\leftrightarrow$ (2) $\leftrightarrow$ (3). Zeigen Sie nun, dass (1), (2) und (3) auch zu (4) und (5) äquivalent sind.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es sei K ein Körper, R ein Ring mit $1 \neq 0$, ferner $\odot : K \times R \to R$ eine Funktion so, dass folgendes gilt:

1. Die additive Gruppe von R bildet zusammen mit dem Skalarbereich K und der skalaren Multiplikation $\odot$ einen K-Vektorraum.
2. Für alle $x, y, z \in R$, $\delta \in K$ ist $\delta \odot (xy) = (\delta \odot x)y = x(\delta \odot y)$.

(a) Zeigen Sie: $(K, R, \odot)$ ist eine K-Algebra.
(b) Zeigen Sie: Jede K-Algebra ist von der Form $(K, R, \odot)$ mit K, R und $\odot$ wie oben.
(c) Sei nun V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Bekanntlich bildet dann $L(V, V)$ eine K-Algebra. Sei nun gemäss (b) $L(V, V) = (K, R, \odot)$. Dann ist also R ein Ring. Bestimmen Sie die Einheitengruppe von R.
(d) Zeigen Sie: $Mat_{n \times n}(K)$ bildet zusammen mit der Matrizenaddition und -multiplikation und der skalaren Multiplikation von Matrizen eine K-Algebra.

Seien A_1 und A_2 K-Algebren. $\rho : A_1 \to A_2$ heißt Isomorphismus von K-Algebren, wenn ρ ein Isomorphismus der entsprechenden Vektorräume ist und für alle $a, b \in A_1$ gilt, dass $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$.

(e) Sei V wie in (c), $\mathbb{B}$ eine Basis von V. Sei $\rho : L(V, V) \to \mathrm{Mat}_{n \times n}$ diejenige Funktion, die einem Element f von $L(V, V)$ seine Matrixdarstellung zur Basis $\mathbb{B}$ zuordnet. Zeigen Sie, dass ρ ein Isomorphismus von K-Algebren ist.
(f) Es seien nun V und W K-Vektorräume mit Dimensionen $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Zeigen Sie durch explizite Angabe einer Basis: $L(V, W)$ hat als K-Vektorraum die Dimension mn.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe bis zum 18.01.2016, 12.30. Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in das Postfach Ihres Tutors im Gang F, 4. Etage.