Übungen zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 1: Es sei K ein Körper.

(a) Zu $\pi : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$ bijektiv sei $f_\pi : K^{n\times 1} \to K^{n\times 1}$ gegeben durch $f_\pi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_{\pi(1)} \\ x_{\pi(2)} \\ ... \\ x_{\pi(n)} \end{pmatrix}$. Finden Sie hier die Matrixdarstellung von f_π bezüglich der Standardbasis von $K^{n\times 1}$.

(b) Es sei $\mathbb{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ mit $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Finden Sie eine invertierbare Matrix P derart, dass für alle $\alpha \in K^{4\times 1}$ gilt: $P[\alpha]_{\mathscr{E}} = [\alpha]_{\mathbb{B}}$, wobei $\mathscr{E}$ die Standardbasis des K-Vektorraumes $K^{4\times 1}$ bezeichnet.

Aufgabe 2: Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $T : V \to V$ Isomorphismus, ferner $A \in K^{n\times n}$ invertierbar.

(a) Es seien $0 \neq w \in K^{n\times 1}$ und $0 \neq v \in V$ beliebig. Zeigen Sie: Es existiert eine Basis $\mathbb{B}$ von V so, dass $[v]_{\mathbb{B}} = w$, d.h. so, dass w die Darstellung des Vektors v zur Basis $\mathbb{B}$ ist. Zeigen Sie weiter: Ist V unendlich und $n > 1$, so existieren sogar unendlich viele solche Basen.

(b) Sei $\mathbb{B}$ eine Basis von V. Zeigen Sie: Es existiert eine Basis $\mathbb{B}'$ von V so, dass $A = [T]_{\mathbb{B},\mathbb{B}'}$.

(c) Sei $\mathbb{B}'$ eine Basis von V. Zeigen Sie: Es existiert eine Basis $\mathbb{B}$ von V so, dass $A = [T]_{\mathbb{B},\mathbb{B}'}$.

Aufgabe 3: Ein reelles Polynom vom Grad $\leq n$ ist ein Term der Form $\Sigma_{i=0}^n a_i X^i$ mit $a_i \in \mathbb{R}$ für $0 \leq i \leq n$. Mit $\mathbb{R}_n[X]$ bezeichnen wir die Menge der reellen Polynome vom Grad $\leq n$. Zu $p, q \in \mathbb{R}_n[X]$, $p = \Sigma_{i=0}^n a_i X^i$, $q = \Sigma_{i=0}^n b_i X^i$ und $c \in \mathbb{R}$ definieren wir $p + q := \Sigma_{i=0}^n (a_i + b_i) X^i$ und $c \cdot p = \Sigma_{i=0}^n (c a_i) X^i$.

(a) Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{R}_n[X]$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(b) Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{B}_n := \{X^i : 0 \leq i \leq n\}$ eine Basis von $\mathbb{R}_n[X]$.

Der Ableitungsoperator $D : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ ist definiert durch $D(\Sigma_{i=0}^n a_i X^i) = \Sigma_{i=1}^n (i a_i) X^{i-1}$.

(c) Zeigen Sie: D ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}$-Vektorräumen und bestimmen Sie $[D]_{\mathbb{B}_n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4: Es seien K ein Körper sowie $A, B, P \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ so, dass P invertierbar und $B = P^{-1}AP$. Finden Sie $T \in L(K^n, K^n)$ sowie Basen $\mathbb{B}_1$ und $\mathbb{B}_2$ von K^n derart, dass $A = [T]_{\mathbb{B}_1}$ und $B = [T]_{\mathbb{B}_2}$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie: Für $A, B \in K^{n\times n}$ ist $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. Beweisen oder widerlegen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $A, B \in K^{n\times n}$ ist $\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(AB)$.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: Es existieren $A, B \in K^{n\times n}$ so, dass $AB - BA = I_n$.

(c) Zeigen Sie: Für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist $\mathrm{tr}(AA^t) \geq 0$ und bestimmen Sie (mit Beweis) alle Elemente M von $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\mathrm{tr}(MM^t) = 0$.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.

Abgabe bis zum 25.01.2016, 12.30. Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in das Postfach Ihres Tutors im Gang F, 4. Etage.