Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl

WS 15/16
01.02.2016
Zettel 14

Übungen zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 1: Entscheiden Sie für jede der folgenden Wahlen eines Körpers K, zweier K-Vektorräume V_1 und V_2 sowie zweier Untervektorräume U_1 von V_1 bzw. U_2 von V_2, ob $V_1/U_1 \cong V_2/U_2$. Beweisen Sie Ihre Antworten.

(a) $K = \mathbb{R}$, $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^2$, $U_1 = \{(x,0)^t : x \in \mathbb{R}\}$, $U_2 = \{(0,x)^t : x \in \mathbb{R}\}$

(b) $K = \mathbb{Q}$, $V_1 = \mathbb{Q}^4$, $V_2 = \mathbb{Q}^2$, $U_1 = \{(a, -a+b, b, 2a+b)^t : a, b \in \mathbb{Q}\}$, $U_2 = \{0\}$

(c) K beliebig, $n \in \mathbb{N}$, $V_1 = V_2 = K^{n\times n}$, $U_1 = \{A \in V_1 : (\forall i,j \in \mathbb{N})(A)_{ij} = (A)_{ji}\}$, $U_2 = \{A \in V_2 : (\forall i,j \in \mathbb{N})(A)_{ij} = (A)_{(n+1-i)j}\}$

Aufgabe 2: Entscheide für jede der folgenden Wahlen eines Körpers K, eines K-Vektorraumes V, eines Unterraumes U von V sowie zweier Elemente $v, w \in V$, ob $v \in w + U$: Beweisen Sie Ihre Antworten.

(a) $K = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{R}$, $U = \mathbb{Q}$, $v = \sqrt{2}$, $w = 3$

(b) K beliebig, $n \in \mathbb{N}$, $V = K^{n\times n}$, $U = \{A \in V : \forall 1 \le i,j \le n((A)_{ij} = (A)_{ji})\}$, $v = I_n$, $w \in K^{n\times n}$ gegeben durch $(w)_{ij} = 1$ für $i+j = n+1$ und $(w)_{ij} = 0$, sonst.

(c) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathrm{Fkt}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $U = \{f \in V : \exists c \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathbb{R}(-c < f(x) < c)\}$, $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $v(x) = x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $w(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Hierbei bezeichnet $\mathrm{Fkt}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ den $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es sei $(G,+)$ eine abelsche Gruppe und H eine Untergruppe von G. Für $g \in G$ sei $g + H := \{g + h : h \in H\}$. Es bezeichne nun G/H die Menge $\{g + H : g \in G\}$.

(a) Zeigen Sie: Sind $g_1, g_2, g_1', g_2' \in G$, $g_1 + H = g_1' + H$ und $g_2 + H = g_2' + H$, so ist auch $(g_1 + g_2) + H = (g_1' + g_2') + H$. Es ist also durch $\oplus : G/H \times G/H \to G/H$, $(g_1 + H) \oplus (g_2 + H) = (g_1 + g_2) + H$ eine Verknüpfung auf G/H definiert.

(b) Zeigen Sie: G/H bildet mit $\oplus$ eine abelsche Gruppe.

(c) Es seien G, H abelsche Gruppen, $f : G \to H$ ein Gruppenepimorphismus. Zeigen Sie: $G/\ker(f) \cong H$.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.

Abgabe bis zum 08.02.2016, 12.30. Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in das Postfach Ihres Tutors im Gang F, 4. Etage.