Mathematisches Institut
der Universität Konstanz
S. Kuhlmann, M.Carl

WS 15/16
26.10.2015
Zettel 2

Übungen zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 1: Bestimmen Sie mithilfe des Euklidischen Algorithmus und seiner Umkehrung:
(a) $\mathrm{ggT}(193, 60)$
(b) Zwei ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ so, dass $169x + 144y = 1$
(c) Das multiplikative Inverse von 4 in $\mathbb{Z}_{19}$
(d) Das multiplikative Inverse von 10 in $\mathbb{Z}_{27}$
Geben Sie die Zwischenschritte an!

Aufgabe 2:
(a) Schreiben Sie die Verknüpfungstafeln für die Addition und Multiplikation in $\mathbb{Z}_n$ auf und bestimmen Sie die multiplikativ invertierbaren Elemente von $\mathbb{Z}_n$ für $n = 4, 5, 6$.
(b) Finden Sie für folgende Werte von n jeweils alle Elemente $x \in \mathbb{Z}_n$, die der Gleichung genügen. Begründen Sie, warum es keine weiteren gibt. (Beachten Sie, dass die Lösungsmenge auch leer sein kann!)

- $n = 5$, $3x = 1$
- $n = 7$, $x^2 = 2$
- $n = 11$, $x^2 + 1 = 0$
- $n = 9$, $x^3 = 0$
- $n = 12$, $2x = 4$
- $n = 12$, $2x = 3$

Aufgabe 3: Es sei $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ definiert wie in der Vorlesung.
(a) Zeigen Sie: $\cdot_n$ ist assoziativ, d.h. $a \cdot_n (b \cdot_n c) = (a \cdot_n b) \cdot_n c$ für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
(b) Zeigen Sie: $+_n$ ist distributiv über $\cdot_n$, d.h. $a_n \cdot_n (b +_n c) = a \cdot_n b +_n a \cdot_n c$ für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 4: Es seien $(R_1, +_1, \cdot_1)$ und $(R_2, +_2, \cdot_2)$ kommutative Ringe mit 1. Wir definieren zwei Verknüpfungen $+, \cdot$ auf der Menge $R_1 \times R_2$ durch: $(r_1, r_2) + (r_3, r_4) = (r_1 +_1 r_3, r_2 +_2 r_4)$ und $(r_1, r_2) \cdot (r_3, r_4) = (r_1 \cdot_1 r_3, r_2 \cdot_2 r_4)$.
(a) Zeigen Sie: $(R_1 \times R_2, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring mit 1.
(b) Es seien nun R_1 und R_2 Körper. Ist dann auch $(R_1 \times R_2, +, \cdot)$ ein Körper? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Zusatzaufgabe für Interessierte:

Betrachten Sie die Struktur $T := (\mathbb{N}_0, \mathrm{ggT})$.

(a) Zeigen Sie: T erfüllt alle Axiome für abelsche Gruppen bis auf die Existenz von Inversen.

(b) Finden Sie eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}$ mit mindestens fünf Elementen so, dass (A, ggT) alle Axiome für abelsche Gruppen bis auf die Existenz von Inversen erfüllt und ein $n \in A$ mit $n \neq 0$ so existiert, dass $\mathrm{ggT}(n, a) = a$ für alle $a \in A$.

(c) Zeigen Sie, dass jedes $A \subseteq \mathbb{N}$, das die in (b) aufgeführten Eigenschaften hat, endlich ist.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.

Abgabe bis zum 02.11.2015, 12.30. Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in das Postfach Ihres Tutors im Gang F, 4. Etage.