Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl

WS 15/16
02.11.2015
Zettel 3

Übungen zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 1: Sei $1 < n \in \mathbb{N}$. Eine natürliche Zahl $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$ wird **Einheit** von $\mathbb{Z}_n$ genannt, falls $l \in \{1, 2, ..., n-1\}$ existiert mit $k \cdot_n l = 1$. Es sei $U(n)$ die Menge der Einheiten von $\mathbb{Z}_n$.

a) Finden Sie $U(14)$. Geben Sie die Verknüpfungstabellen für $(U(14), \cdot_{14})$ an, d.h. eine Tabelle, die zu jedem Paar $(a, b) \in U(14) \times U(14)$ das Ergebnis von $a \cdot_{14} b$ angibt.

b) Zeigen Sie: Für $a \in \{1, 2, ..., n-1\}$ ist $a \in U(n)$ genau dann, wenn $ggT(a, n) = 1$.

c) Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $(U(n), \cdot_n)$ abelsche Gruppe.

Aufgabe 2: Sind $(F, +_F, \cdot_F, 0_F, 1_F)$ und $(K, +_K, \cdot_K, 0_K, 1_K)$ Körper, so heißt F **Teilkörper** von K, falls $F \subseteq K$, $0_F = 0_K$, $1_F = 1_K$ und für alle $a, b \in F$ gilt, dass $a +_F b = a +_K b$ und $a \cdot_F b = a \cdot_K b$. Zeigen Sie: Ist F ein Teilkörper eines Körpers K, so ist $\mathrm{char}(F) = \mathrm{char}(K)$.

Aufgabe 3: Wir definieren $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}$. Zeigen Sie: $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], +, \cdot)$ ist Teilkörper[1] von $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, wobei $+$ und $\cdot$ die gewöhnliche Addition und Multiplikation reeller Zahlen bezeichnen.[2]

Aufgabe 4: Es sei $1 < p \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Genau dann gilt für alle $a, b \in \mathbb{N}$, dass aus $p|ab$ schon $p|a \vee p|b$ folgt, wenn p eine Primzahl ist.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es sei R ein Integritätsbereich. Zeigen Sie: Ist R kein Körper, so ist R unendlich.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.

Abgabe bis zum 09.11.2015, 12.30. Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in das Postfach Ihres Tutors im Gang F, 4. Etage.

---

[1] vgl. Aufgabe 2

[2] Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.