Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl

WS 15/16
09.11.2015
Zettel 4

Übungen zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 1: Es sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper, $A \in K^{n\times n}$. Für $1 \leq i, j \leq n$ bezeichnen wir mit a_{ij} den Eintrag (oder Koeffizienten) in der i-ten Zeile und j-ten Spalte von A.

(a) Im Folgenden finden Sie die Klauseln der Definition der reduzierten Zeilenstufenform, einmal 'fast auf Deutsch' (arabisch nummeriert) und einmal in quantorenlogischer Schreibweise (römisch nummeriert). Geben Sie an, welche Klauseln einander entsprechen und begründen Sie Ihre Antwort kurz.

1. Der erste Koeffizient $\neq 0$ in einer von 0 verschiedenen Reihe R_i ist gleich 1 für alle $1 \leq i \leq n$
2. Jede Spalte S_i, in der sich eine Haupteins befindet, hat alle anderen Koeffizienten gleich 0.
3. Wenn es eine Nullzeile gibt, so erscheint sie nach jeder Zeile, die keine Nullzeile ist.

I $\forall_{1\leq i\leq n}\forall_{1\leq j\leq n}(((\exists_{1\leq k\leq n}a_{ik} \neq 0) \wedge (\forall_{1\leq l\leq n}a_{jl} = 0)) \rightarrow (i < j))$

II $\forall_{1\leq i\leq n}((\exists_{1\leq j\leq n}(a_{ji} = 1 \wedge \forall_{1\leq k<i}(a_{jk} = 0))) \rightarrow (\forall_{1\leq l\leq n}(l \neq j \rightarrow a_{li} = 0)))$

III $\forall_{1\leq i\leq n}(\exists_{1\leq j\leq n}(a_{ij} \neq 0) \rightarrow (\exists_{1\leq k\leq n}(\forall_{1\leq l<k}(a_{il} = 0) \wedge (a_{ik} = 1))))$

(b) Die vierte Klausel in der Definition der reduzierten Zeilenstufenform lautet:

> Seien $Z_1, ..., Z_r$ die nicht identischen Nullzeilen von A und k_i für $i \in \{1, ..., r\}$ die Spalte, in der die Haupteins der i-ten Zeile erscheint. Dann ist $k_1 < k_2 < ... < k_r$.

Formulieren Sie auch diese Klausel nach dem Vorbild von (a) quantorenlogisch. Erläutern und begründen Sie Ihre Vorgehensweise. Beachten Sie insbesondere, das Auslassungszeichen wie '...' in quantorenlogischer Schreibeweise **nicht** zulässig sind.

Aufgabe 2: Sind $(F, +_F, \cdot_F, 0_F, 1_F)$ und $(K, +_K, \cdot_K, 0_K, 1_K)$ Körper, so heißt F **Teilkörper** von K, falls $F \subseteq K$, $0_F = 0_K$, $1_F = 1_K$ und für alle $a, b \in F$ gilt, dass $a +_F b = a +_K b$ und $a \cdot_F b = a \cdot_K b$.

Es sei nun $(K, +_K, \cdot_K, 0_K, 1_K)$ ein Körper, $H \subseteq K$. Mit $+_H$ und $\cdot_H$ bezeichnen wir die Einschränkung von $+$ und $\cdot$ auf H, d.h. Funktionen $+_H : H \times H \rightarrow K$ und $\cdot_H : H \times H \rightarrow K$ so, dass $a +_H b = a + b$ und $a \cdot_H b = a \cdot b$ für alle $a, b \in H$.

(a) Zeigen Sie: H ist mit den Operationen $+_H$, $\cdot_H$ genau dann ein Teilkörper von K, wenn folgende Bedingungen (alle) erfüllt sind:

1. $0_K \in H$ und $1_K \in H$.

2. Für alle $a, b \in H$ ist auch $a + b \in H$ und $a \cdot b \in H$.

3. Ist $a \in H$, so ist auch $-a \in H$, wobei $-a$ das additiv Inverse von a in K bezeichnet

4. Ist $a \in H \setminus \{0_K\}$, so ist auch $a^{-1} \in H$, wobei a^{-1} das multiplikativ Inverse von a in K bezeichnet.

(b) Zeigen Sie: Genügt H den Bedingungen (1)-(4), so ist $0_H = 0_K$ und $1_H = 1_K$.

(c) Zeigen Sie: Ist H ein Teilkörper von K, $a \in H$ und bezeichnen $-a_H$ bzw. a_H^{-1} das additiv bzw. das multiplikativ Inverse von a in H und $-a$ bzw. a^{-1} das additiv bzw. das multiplikativ Inverse von a in K, so ist $-a_H = -a$ und $a_H^{-1} = a^{-1}$.

Aufgabe 3: Es sei $n \in \mathbb{N}$ und M eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie: Das homogene lineare Gleichungssystem $Mx = 0$ ist genau dann in $\mathbb{R}$ lösbar (d.h. hat nichttriviale Lösungen), wenn es in $\mathbb{Q}$ lösbar ist (also nichttriviale Lösungen hat).

Aufgabe 4: Bringen Sie die folgenden Gleichungssysteme über $\mathbb{R}$ in reduzierte Zeilenstufenform. Entscheiden Sie, ob sie konsistent sind und ob es ggf. freie Variablen sind und wenn ja, wieviele. Bestimmen Sie außerdem die Lösungsmenge.

(a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$ (b) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 16 & 42 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 2 \end{array}\right)$ (c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$

Zusatzaufgabe für Interessierte:

Beweisen Sie: Für $a, b \in \mathbb{N}$ ist $\mathrm{ggT}(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{\mathrm{ggT}(a,b)} - 1$

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.

Abgabe bis zum 16.11.2015, 12.30. Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in das Postfach Ihres Tutors im Gang F, 4. Etage.