



Übungen zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 1: Berechnen Sie mit ausführlichem Rechenweg:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -6 \\ \frac{1}{2} & -5 & 7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ über \mathbb{Z}_6

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ -1 & 7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 2 \\ 1 & 9 & -7 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2: a) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem in \mathbb{R} mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

$$3x_1 - x_2 + 4x_3 = 12 \quad (1)$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \quad (2)$$

$$6x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 16 \quad (3)$$

$$5x_1 + 7x_2 - 11x_3 = -24 \quad (4)$$

Geben Sie die Zwischenschritte an!

b) Lösen Sie jetzt das folgende Gleichungssystem S in \mathbb{F}_{13} mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

$$3x_1 + 14x_2 = 2 \quad (5)$$

$$4x_1 - 7x_2 = 5 \quad (6)$$

Geben Sie auch hier die Zwischenschritte an.

c) Ist S in \mathbb{Z}_{14} lösbar? Die Antwort ist zu begründen.

Aufgabe 3: Finden Sie zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine $n \times n$ -Matrix M_n über \mathbb{R} so, dass

$$M_n \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \dots \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \text{ für alle } x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 4: a) Finden Sie zwei quadratische Matrizen A und B über \mathbb{F}_5 so, dass $A \cdot B \neq B \cdot A$.

b) Finden Sie zwei quadratische reelle Matrizen $A \neq 0$ und $B \neq 0$ so, dass $A \cdot B = B \cdot A = 0$.

c) Finden Sie eine quadratische reelle Matrix $A \neq 0$ so, dass $A^2 = 0$

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in K^{n \times n}$ so, dass $AB + A + B = 0$. Zeigen Sie: Es ist $AB = BA$.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.

Abgabe bis zum 23.11.2015, 12.30. Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in das Postfach Ihres Tutors im Gang F , 4. Etage.