# Übungen zur Linearen Algebra 1

**Aufgabe 1**: Berechnen Sie die Inversen der folgenden Matrizen über den jeweiligen Körpern:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{F}_2$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{F}_{13}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & -2 & 7 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \\ -4 & -6 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{Q}$

**Aufgabe 2**: Es seien $A$ und $B$ Matrizen der Dimension $n \times n$ über einem Körper $K$, $I_n$ die $n \times n$-Einheitsmatrix. $A$ heißt linksinvers zu $B$, falls $AB = I_n$, und in diesem Fall heißt auch $B$ rechtsinvers zu $A$. Zeigen Sie: Ist $A$ linksinvers zu $B$, so ist $A$ auch rechtsinvers zu $B$, d.h. für $AB = I_n$ ist auch $BA = I_n$.

**Aufgabe 3**: Es seien $K$ ein Körper, $V$ ein $K$-Vektorraum mit skalarer Multiplikation $\cdot_s$. Mit $0_K$ und $1_K$ bezeichnen wir das additiv bzw. multiplikativ neutrale Element von $K$, mit $0_V$ das additiv neutrale Element von $V$. Ferner bezeichnen wir für $c \in K$ mit $(-c)$ das additive Inverse von $c$ in $K$ und für $c \in V$ entsprechend das additive Inverse von $c$ in $V$.

Führen Sie Ihre Beweise, ausgehend von den Axiomen für Vektorräume, genau aus. Machen Sie insbesondere deutlich, an welcher Stelle Sie welches Axiom benutzen.

(a) Zeigen Sie: Für alle $c \in K$, $v \in V$ gilt:

1. $c \cdot_s 0_V = 0_V$
2. $0_K \cdot_s v = 0_V$
3. $c \cdot_s v = 0_V$ genau dann, wenn $c = 0_K$ oder $v = 0_V$
4. $(-1_K) \cdot_s v = (-v)$.

(b)[1] Es seien nun $n \in \mathbb{N}$, $c, c_1, ..., c_n, d_1, ..., d_n \in K$, $v_1, ..., v_n \in V$; ferner bezeichne $+_K$ die Addition in $K$, $\cdot_K$ die Multiplikation in $K$ und $+_V$ die Addition in $V$. Zeige: Es ist

$$\Sigma_{i=1}^{n} c_i \cdot_s v_i +_V \Sigma_{i=1}^{n} d_i \cdot_s v_i = \Sigma_{i=1}^{n} (c_i +_K d_i) \cdot_s v_i$$

und

$$c \cdot_s \Sigma_{i=1}^{n} (c_i \cdot_s v_i) = \Sigma_{i=1}^{n} (c \cdot_K c_i) \cdot_s v_i$$

**Aufgabe 4**: Es seien $K$ ein Körper und $(V, +_V)$, $(W, +_W)$ zwei $K$-Vektorräume mit skalaren Multiplikationen $\cdot_V : K \times V \to V$ und $\cdot_W : K \times W \to W$. Es seien $U := V \times W$ sowie $+_U : U \times U \to U$ gegeben durch $(v_1, w_1) +_U (v_2, w_2) := (v_1 +_V v_2, w_1 +_W w_2)$ für $v_1, v_2 \in V$, $w_1, w_2 \in W$ und $\cdot_U : K \times U \to U$ gegeben durch $\lambda \cdot_U (v, w) := (\lambda \cdot_V v, \lambda \cdot_W w)$ für $\lambda \in K$, $v \in V$, $w \in W$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass $(U, +_U)$ mit skalarer Multiplikation $\cdot_U$ ein $K$-Vektorraum ist.

**Zusatzaufgabe für Interessierte**: Es sei $J \subseteq Mat_{n\times n}(K)$ eine Menge mit mindestens zwei Elementen von $n \times n$-Matrizen über einem Körper $K$, die unter Matrixaddition abgeschlossen ist, so dass für alle $A \in J$ und **alle** $n \times n$-Matrizen $X$ gilt, dass $XA \in J$ und $AX \in J$. Zeige: $J = Mat_{n\times n}(K)$.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.

Abgabe bis zum 30.11.2015, 12.30. Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in das Postfach Ihres Tutors im Gang $F$, 4. Etage.

[1] Vermeiden Sie in (b) die Verwendung von Auslassungszeichen wie '...'; führen Sie den Beweis sauber mit vollständiger Induktion.