Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl

WS 15/16
30.11.2015
Zettel 7

Übungen zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 1:

Geben Sie in den Teilen $(a) - (c)$ (mit Beweis) an, ob die folgenden Mengen in den jeweiligen Vektorräumen über den jeweiligen Körpern linear abhängig oder unabhängig sind.

(a) $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\} \subset \mathbb{R}$ über $\mathbb{R}$. Was ergibt sich über $\mathbb{Q}$?[1]

(b) $\{\begin{pmatrix} 123 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\frac{1}{3}) \\ \sin(\frac{7}{13}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{17} \\ -\frac{50}{49} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ \frac{3\pi}{177} \end{pmatrix}\} \subset \mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$.

(c) Bildet die Menge der Spalten der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

(d) Es sei $\mathrm{Fkt}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die Menge der Funktionen von den reellen Zahlen in die reellen Zahlen. Für $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathrm{Fkt}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definieren wir $f \oplus g$ durch $(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (wobei $+$ die übliche Addition reeller Zahlen bedeutet), ferner $\lambda \odot f$ durch $(\lambda \odot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (wobei $\cdot$ die übliche Multiplikation reeller Zahlen bedeutet). Zeigen Sie, dass $\mathrm{Fkt}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit Addition $\oplus$ und skalarer Multiplikation $\odot$ zu einem $\mathbb{R}$-Vektorraum wird.

Aufgabe 2:

Entscheiden Sie (mit Beweis!) die folgenden Aussagen. Achten Sie auf die Form des Beweises - machen Sie insbesondere deutlich, was Voraussetzung, Behauptung und Folgerung ist. Dabei bezeichnet K einen Körper, $\mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$ den Vektorraum der $m \times n$-Matrizen über K, $\mathrm{Fkt}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ den $\mathbb{R}$-Vektorraum der Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$[2].

a) Sei INV_n die Menge der invertierbaren $n \times n$-Matrizen über K. Dann ist INV_n Unterraum von $\mathrm{Mat}_{n \times n}(K)$.

b) Sei NINV_n die Menge der nicht invertierbaren $n \times n$-Matrizen über K. Dann ist NINV_n Unterraum von $\mathrm{Mat}_{n \times n}(K)$.

c) Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(K)$. Dann ist $\{B \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(K) | AB = BA\}$ Unterraum von $\mathrm{Mat}_{n \times n}(K)$.

d) $\{(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n | a_1 > 0\}$ ist Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

e) $\{(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n | a_1 + 3a_2 = a_3\}$ ist für $n \geq 3$ Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

f) $\{(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n | a_2 = a_1^2\}$ ist für $n \geq 2$ Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

g) $\{f \in \mathrm{Fkt}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | \forall x \in \mathbb{R} f(x^2) = (f(x))^2\}$ ist Unterraum von $\mathrm{Fkt}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

---

[1] Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ irrational sind.

[2] Vgl. Aufgabe 1d

h) $\{f \in \mathrm{Fkt}(\mathbb{R},\mathbb{R}) | f(-1) = 0\}$ ist Unterraum von $Fkt(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

i) $\{f \in \mathrm{Fkt}(\mathbb{R},\mathbb{R}) | f(-1) = 1\}$ ist Unterraum von $Fkt(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

j) $(3,-1,0,-1) \in \mathbb{R}^4$ ist Element von $\mathrm{span}(\{(2,-1,3,2),(-1,1,1,-3),(1,1,9,-5)\})$.

Aufgabe 3:
a) Zeigen Sie: $X_1 := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \forall x \in \mathbb{R} f(x) = f(-x)\}$ und
$X_2 := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \forall x \in \mathbb{R} f(x) = -f(-x)\}$ sind Unterräume von $\mathrm{Fkt}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
b) Bestimmen Sie $X_1 + X_2$ und $X_1 \cap X_2$.

Aufgabe 4:
Es sei $V = \{v_1, ..., v_n\}$ ein endlicher Vektorraum über einem Körper K. Der Vektor v_k (mit $k \in \{1, ..., n\}$) heißt 'überflüssig', falls v_k eine K-Linearkombination von $\{v_i : i < k\}$ ist. Es sei $U \subseteq V$ die Menge der überflüssigen Vektoren. Zeige: $V \setminus U$ ist Basis von V.

Zusatzaufgabe für Interessierte:
Sei K ein endlicher Körper mit k Elementen, und sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über K, ferner $l \leq n$.
a) Bestimmen Sie (mit Beweis) die Anzahl der Basen von V.
b) Bestimmen Sie (mit Beweis) die Anzahl der Unterräume von V mit Dimension l.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.

Abgabe bis zum 07.12.2015, 12.30. Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in das Postfach Ihres Tutors im Gang F, 4. Etage.