Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl

WS 15/16
07.12.2015
Zettel 8

Übungen zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 1: Geben Sie für folgende Wahlen eines Körpers K, eines K-Vektorraumes V und einer linear unbhängigen Teilmenge $X \subseteq V$ eine Basis $\mathbb{B}$ von V mit $X \subseteq \mathbb{B}$ an.

(a) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $X = \{(1, 2, 3), (3, 2, 1)\}$

(b) $K = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{Q}^{2\times 2}$, $X = \{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$

(c) $K = \mathbb{Z}_2$, $V = \mathbb{Z}_2^{2\times 2}$, $X = \{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$

Aufgabe 2: Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $\mathscr{S}_n \subseteq K^{n\times n}$ die Menge der symmetrischen $n \times n$-Matrizen über K, d.h. derjenigen Elemente A von $K^{n\times n}$, für die $A_{ij} = A_{ji}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ gilt.

(a) Zeigen Sie: $\mathscr{S}_n$ ist ein K-Vektorraum.

(b) Wir definieren nun für $1 \leq i, j \leq n$ die Matrix A^{ij} durch: $A^{ij}_{ij} = A^{ij}_{ji} = 1$ und $A^{ij}_{kl} = 0$ falls $\{k, l\} \neq \{i, j\}$. Zeigen Sie: Die Menge $\mathbb{B} := \{A_{ij} : 1 \leq i \leq j \leq n$ ist eine Basis von $\mathscr{S}_n$.

(c) Bestimmen Sie die Dimension von $\mathscr{S}_n$ über K.

Aufgabe 3:

(a) Es sei $\mathbb{B} := \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ die Standardbasis von $\mathbb{F}_5^3$ als $\mathbb{F}_5$-Vektorraum. Bestimmen Sie die Anzahl der Isomorphismen $\sigma : \mathbb{F}_5^3 \to \mathbb{F}_5^3$ mit $\{\sigma(b) : b \in \mathbb{B}\} = \mathbb{B}$.

(b) Es sei V ein 3-dimensionaler $\mathbb{F}_5$-Vektorraum. Bestimmen Sie die Anzahl der Isomorphismen $\sigma : V \to \mathbb{F}_5^3$.

(c)* Es sei p eine Primzahl, $k \in \mathbb{N}$. Stellen Sie eine allgemeine Vermutung über die Anzahl der Isomorphismen zwischen einem k-dimensionalen $\mathbb{F}_p$-Vektorraum V und $\mathbb{F}_p^k$ auf und beweisen Sie sie. (5 Zusatzpunkte)

Aufgabe 4:

(a) Zeigen Sie: Bezeichnen $+_{\mathbb{R}}$ und $\cdot$ die übliche Multiplikation reeller Zahlen, so ist $(\mathbb{R}, +_{\mathbb{R}})$ mit Skalarmultiplikation $\cdot$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

(b) Zeigen Sie: Ist $X \subseteq \mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$ linear abhängig, so existieren $n \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_n \in X$ und $z_1, ..., z_n \in \mathbb{Z}$ mit $\Sigma_{i=1}^n z_i x_i = 0$.

Es sei nun $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen. Ist x eine positive reelle Zahl, so bezeichnen wir mit $\mathrm{ld}(x)$ die eindeutig bestimmte reelle Zahl y so, dass $2^y = x$. $\mathrm{ld}(x)$ heißt auch 'dualer Logarithmus' von x.

(c) Zeigen Sie: Die Menge $\{\mathrm{ld}(p) : p \in \mathbb{P}\}$ ist linear unabhängig über $\mathbb{Q}$. Folgern Sie, dass $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum keine endliche Basis hat.[1]

Bemerkung: Beachten Sie, dass hieraus allein noch nicht folgt, dass $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$ unendlichdimensional ist: Dazu müßten wir außerdem noch zeigen, dass $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum überhaupt eine Basis hat. In der linearen Algebra 2 werden Sie lernen, dass tatsächlich jeder Vektorraum eine Basis besitzt.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es bezeichne M_2 die Menge aller Funktionen von $\mathbb{N}$ in die Menge $\{0, 1\}$. Unser Ziel ist, zu zeigen, dass M_2 nicht abzählbar ist. Das zeigen wir durch einen Widerspruchsbeweis. Dazu nehmen wir an, M_2 sei abzählbar und $F : \mathbb{N} \to M_2$ eine Bijektion. Wir definieren nun eine Funktion $g \in M_2$ durch $g(n) = 1 - (F(n))(n)$ für $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie: Ist $n \in \mathbb{N}$, so ist $(F(n))(n) \neq g(n)$. Folgern Sie, dass g nicht im Bild von F liegt, im Widerspruch zur Annahme, dass F surjektiv ist.

(b) Folgern Sie, dass M_2 nicht abzählbar ist.

(c) Es sei nun M_{10} die Menge aller Funktionen von $\mathbb{N}$ in die Menge $\{0, 1, ..., 9\}$. Finden Sie eine Surjektion zwischen M_{10} und $[0, 1]$, der Menge aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1.

(d) Finden Sie eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}$ und $(0, 1) = [0, 1] \setminus \{0, 1\}$.

(e) Finden Sie eine Surjektion von M_2 auf M_{10}.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.

Abgabe bis zum 14.12.2015, 12.30. Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in das Postfach Ihres Tutors im Gang F, 4. Etage.

[1] Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass jede natürliche Zahl sich auf eine bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutige Weise als Produkt von Primzahlen darstellen läßt.