Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl

WS 15/16
14.12.2015
Zettel 9

Übungen zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 1: Sei $\Theta \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie: Die Spalten der Matrix $M_\Theta := \begin{pmatrix} \cos(\Theta) & -\sin(\Theta) \\ \sin(\Theta) & \cos(\Theta) \end{pmatrix}$ bilden für jedes Θ eine Basis B_Θ von $\mathbb{R}^2$.

(b) Seien Θ_1 und Θ_2 aus $\mathbb{R}$. Finden Sie die Matrix des Basiswechsels zwischen B_{Θ_1} und B_{Θ_2}, also diejenige Matrix T, so dass für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ gilt: $T[v]_{B_{\Theta_1}} = [v]_{B_{\Theta_2}}$ (wobei $[v]_{B_{\Theta_1}}$ bzw. $[v]_{B_{\Theta_2}}$ wie üblich die Darstellungen des Vektors v bezüglich der Basen B_{Θ_1} bzw. B_{Θ_2} bezeichnen).

Aufgabe 2: Wir betrachten die 5×5-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Finden Sie eine invertierbare Matrix P so, dass PA in reduzierter Zeilenstufenform ist.

(b) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension des Zeilenraumes W von A.

(c) Bestimmen Sie die Koordinatenmatrix eines Vektors $(b_1, .., b_5) \in W$ in der angeordneten Basis, die Sie in b) gewählt haben.

(d) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension des Vektorraumes V aller 5×1-Spaltenmatrizen X mit $AX = 0$.

(e) Für welche $Y \in Mat_{5\times 1}(\mathbb{R})$ hat $AX = Y$ eine Lösung X?

Aufgabe 3: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass eine $n \times n$-Matrix A invertierbar ist, falls ihre Zeilenvektoren linear unabhängig sind. Zeigen Sie die Umkehrung: Ist A invertierbar, so sind die Zeilenvektoren von A linear unabhängig.

Aufgabe 4: Es sei $\mathbb{F}_{49} = \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$. Wir definieren Verknüpfungen $\oplus$ und $\odot$ auf $\mathbb{F}_{49}$ durch: $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$ und $(a, b) \odot (c, d) = (ac + (-bd), ad + bc)$ (wobei in den Klammern die üblichen Operationen aus $\mathbb{Z}_7$ verwendet werden).

(a) Zeigen Sie: $(\mathbb{F}_{49}, \oplus, \odot)$ ist ein Körper mit genau 49 Elementen und Charakteristik 7.

(b) Zeigen Sie: Es existiert ein Element $x \in \mathbb{F}_{49}$ so, dass $x \odot x = (-1)$.

(c) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{F}_{49}$:

$$(7, 0)x + (3, 0)y = 0$$

$$(4, 0)x + (2, 6)y = 1$$

Zusatzaufgabe für Interessierte: In Aufgabe 4 von Blatt 8 haben Sie gezeigt, dass $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum keine endliche Basis hat. Wir wollen nun zeigen, dass $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$ nicht einmal eine abzählbare Basis hat.

(a) Finden Sie eine bijektive Abbildung $n : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{Z}$.

(b) Finden Sie eine surjektive Abbildung $p : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$. Folgern Sie, dass eine Surjektion $s : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ existiert.

(c) Finden Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Surjektion $s_n : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^n$.

(d) Wir definieren nun eine Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}^i$ durch $f(m, n) = s_m(n)$ für $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass f eine Surjektion von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ auf $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}^i$ ist. Folgern Sie, dass eine Surjektion $g : \mathbb{N} \to \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}^i$ existiert.

Es sei nun $X \subseteq \mathbb{R}$ abzählbar, d.h. es existiere eine Surjektion $h : \mathbb{N} \to X$.

(e) Benutzen Sie (d), um zu zeigen, dass $\operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(X)$ abzählbar ist.

(f) Folgern Sie, dass X keine Basis für $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum ist. Folgern Sie, dass $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum keine abzählbare Basis besitzt.

Bemerkung: Wie schon auf Blatt 8 gilt: Hieraus allein folgt noch nicht, dass $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$ überabzählbare Dimension hat: Dazu müßten wir außerdem noch zeigen, dass $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum überhaupt eine Basis hat. In der linearen Algebra 2 werden Sie lernen, dass tatsächlich jeder Vektorraum eine Basis besitzt.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.

Abgabe bis zum 21.12.2015, 12.30. Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in das Postfach Ihres Tutors im Gang F, 4. Etage.