Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Dr. Merlin Carl
Gabriel Lehericy

SS 2017
28.06.2017
Zettel 10

Übungen zur Mathematischen Logik

Aufgabe 1: Es sei $\mathcal{L}$ eine erststufige Sprache, t ein geschlossener $\mathcal{L}$-Term, ϕ eine $\mathcal{L}$-Formel und $M = (D, I)$ ein $\mathcal{L}$-Modell. Ferner sei x eine Variable und β eine M-Belegung so, dass $x^\beta = t^I$.

(a) Zeige: Dann ist $[\phi\{x/t\}]^{I,\beta} = \phi^{I,\beta}$

(b) Zeige: Ist β' eine x-Variante von β, so ist $[\phi\{x/t\}]^{I,\beta'} = \phi^{I,\beta}$.

Aufgabe 2: Es sei $M = (D, I)$ ein Herbrand-Modell der erststufigen Sprache $\mathcal{L}$, β eine M-Belegung.

(a) Zeige: β ist zugleich eine Substitution.

(b) Zeige: Ist ϕ eine $\mathcal{L}$-Formel, so ist $\phi^{I,\beta} = (\phi\beta)^I$.

Aufgabe 3: Es sei $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\{R, P\}, \emptyset, \{c_0, c_1, c_2\})$, wobei R ein zweistelliges und P ein einstelliges Relationszeichen ist. Wir betrachten die folgende Menge S von $\mathcal{L}$-Sätzen: $S = \{\forall x R(x, x), \forall x \exists y \neg R(x, y), \forall x \exists y R(x, y), P(c_0), \forall x \forall y((P(x) \wedge R(x, y)) \rightarrow P(y))\}$.

(a) Gib ein Herbrand-Modell für $\mathcal{L}$ an, in dem alle Elemente von S erfüllt sind.

(b) Wir fügen zu S noch den Satz $\forall x \forall y(R(x, y) \rightarrow R(y, x))$ hinzu, um S' zu erhalten. Ist S' erfüllbar? Existiert ein Herbrand-Modell für $\mathcal{L}$, in dem S' erfüllt ist?

(c) Wir fügen nun zu $\mathcal{L}$ noch das einstellige Funktionszeichen f hinzu und erhalten die Sprache $\mathcal{L}'$. Gibt es ein Herbrand-Modell von $\mathcal{L}'$, in dem S' erfüllt ist?

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es sei $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ eine Sprache. Sind $M_0 = (D_0, I_0)$ und $M_1 = (D_1, I_1)$ $\mathcal{L}$-Strukturen, so heißt eine Bijektion $\pi : M_0 \rightarrow M_1$ 'Isomorphismus' von M_0 und M_1, falls gilt:

- $\pi(c^{I_0}) = c^{I_1}$ für $c \in \mathcal{C}$
- $(\pi(a_1), ..., \pi(a_n)) \in R^{I_1}$ gdw. $(a_1, ..., a_n) \in R^{I_0}$ für alle n-stelligen $R \in \mathcal{R}$ und alle $a_1, ..., a_n \in D_0$
- $\pi(f^{I_0}(a_1, ..., a_n)) = f^{I_1}(\pi(a_1, ..., \pi(a_n))$ für alle n-stelligen $f \in \mathcal{F}$ und alle $a_1, ..., a_n \in D_0$.

Ein Isomorphismus π einer $\mathcal{L}$-Struktur $M = (D, E)$ auf sich selbst heißt 'Automorphismus' von M.

Eine Teilmenge $X \subseteq D$ heißt 'definierbar in M', falls eine $\mathcal{L}$-Formel $\phi(x)$ mit einer freien Variablen x so existiert, dass, für alle M-Belegungen β, $[\phi]^{I,\beta} = w$ genau dann gilt wenn $\beta(x) \in X$.

(a) Zeige: In $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist $\mathbb{P}$, die Menge der Primzahlen, definierbar.

(b) Zeige: Ist $X \subseteq D$ und existiert ein Automorphismus π von M mit $\{\pi(x) : x \in X\} \neq X$, so ist X in M nicht definierbar.

(c) Zeige: In $(\mathbb{Z}, +)$ ist $\mathbb{N}$ nicht definierbar.

(d) Zeige: In $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist $5\mathbb{Z}$ nicht definierbar.

Bei jeder Aufgabe sind, wenn nichts anderes gesagt ist, bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 05.07.2017 vor der Vorlesung in den Briefkasten Ihrer Übungsgruppe.