

Übungen zur Mathematischen Logik

Aufgabe 1: Es sei \mathcal{L} eine erststufige Sprache, ϕ eine \mathcal{L} -Formel, x eine Variable und c ein Konstantenzeichen, das in ϕ nicht vorkommt. Zeige: ϕ ist genau dann allgemeingültig, wenn $\phi\{\frac{x}{c}\}$ allgemeingültig ist.

Aufgabe 2: Es sei \mathcal{C} eine EKE. Zeige: Es existiert eine EKE $\mathcal{C}' \supseteq \mathcal{C}$ so, dass \mathcal{C}' unter Teilmengen abgeschlossen ist.

Aufgabe 3: Es sei \mathcal{C} eine unter Teilmengen abgeschlossene alternative EKE. Zeige: Es existiert eine alternative EKE $\mathcal{C}' \supseteq \mathcal{C}$ so, dass \mathcal{C}' endlichen Charakter hat.

Zusatzaufgabe für Interessierte:

(a) Es sei \mathcal{L} eine erststufige Sprache. Zeige: Die Familie \mathcal{S} der erfüllbaren Mengen von \mathcal{L} -Formeln ist eine EKE.

(b) Es sei $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ die erststufige Sprache mit zwei zweistelligen Relationszeichen $<$ und $=$, zwei Konstantenzeichen 0 und 1 sowie zwei zweistelligen Funktionszeichen $+$ und \cdot . Ferner sei $M_{\mathbb{R}}$ die Menge aller \mathcal{L} -Sätze, die unter der üblichen Interpretation der Zeichen in \mathbb{R} wahr sind. Zeige: Es existiert eine $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ -Struktur (D, I) , in der alle Elemente von $M_{\mathbb{R}}$ wahr sind und so, dass D abzählbar ist.

Bei jeder Aufgabe sind, wenn nichts anderes gesagt ist, bis zu 10 Punkte zu erreichen.

Abgabe am 12.07.2017 vor der Vorlesung in den Briefkasten Ihrer Übungsgruppe.