Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Dr. Merlin Carl
Gabriel Lehericy

SS 2017
12.07.2017
Zettel 12

Übungen zur Mathematischen Logik

Aufgabe 1: Beweise die folgende Aussage mit der Tableau-Methode:

$$P(c) \to ((\forall x)(\exists y)(\neg Q(x) \vee (Q(x) \wedge P(y)))).$$

Aufgabe 2:

(a) Es sei $\mathcal{L}$ eine erststufige Sprache mit einem zweistelligen Relationszeichen R. Finde zu jedem $n \in \mathbb{N}$ einen $\mathcal{L}$-Satz ϕ_n so, dass ϕ_n genau in den $\mathcal{L}_n$-Strukturen mit mindestens n Elementen wahr ist.

Es sei nun $\mathcal{L}'$ eine erststufige Sprache, M eine Menge von $\mathcal{L}'$-Sätzen.

(b) Zeige: Es existiert eine Sprache $\mathcal{L}'' \supseteq \mathcal{L}'$ so, dass zu jeden $n \in \mathbb{N}$ ein $\mathcal{L}''$-Satz ϕ_n existiert, für den $M \cup \{\phi_n\}$ genau in den $\mathcal{L}''$-Strukturen wahr ist, in denen alle Elemente von M wahr sind und die mindestens n Elemente haben.

(c) Zeige: Ist $M \cup \{\phi_n\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ erfüllbar, so auch $M \cup \{\phi_i : i \in \mathbb{N}\}$.

(d) Folgere: Ist M in beliebig großen endlichen $\mathcal{L}'$-Strukturen erfüllbar, so auch in mindestens einer unendlichen $\mathcal{L}'$-Struktur.

(e) Für eine erststufige Sprache $\mathcal{L}$ und eine Menge M von $\mathcal{L}$-Sätzen bezeichnen wir mit $\mathrm{gs}(M)$ das 'Größenspektrum' von M, d.h. die Menge aller Kardinalitäten von $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathfrak{S}$, in denen alle Elemente von M wahr sind (ist $\mathfrak{S}$ unendlich, so bezeichnen wir die Kardinalität mit ∞). Zeige: Für keine erststufige Sprache $\mathcal{L}$ und keine Menge M von $\mathcal{L}$-Sätzen ist $\mathrm{gs}(M) = \mathbb{N}$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Für eine erststufige Sprache $\mathcal{L}$ und eine Menge M von $\mathcal{L}$-Sätzen definieren wir $\mathrm{gs}_{\mathrm{fin}}(M)$ wie in Aufgabe 2 mit der Änderung, dass ∞ nicht länger als Element zugelassen ist; $\mathrm{gs}_{\mathrm{fin}}(M)$ bezeichnet also die möglichen Kardinalitäten **endlicher** Modelle von M.

Zeige: Es existieren $\mathcal{L}$ und M so, dass $\mathrm{gs}_{\mathrm{fin}}(M)$ gerade...

(a) die Menge der geraden natürlichen Zahlen ist.

(b) die Menge der Quadrate natürlicher Zahlen ist.

(c) die Menge der Primzahlen ist.

(d) die Menge der Fibonaccizahlen ist. (Die Fibonaccifolge $(F_i : i \in \mathbb{N})$ ist definiert durch $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ für $n \in \mathbb{N}$.)

Bei jeder Aufgabe sind, wenn nichts anderes gesagt ist, bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 19.07.2017 vor der Vorlesung in den Briefkasten Ihrer Übungsgruppe.