Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Dr. Merlin Carl
Gabriel Lehericy

SS 2017
19.07.2017
Zettel 13

Übungen zur Mathematischen Logik

Aufgabe 1: Benutze die erststufige Resolutionsmethode, um die folgenden erststufigen Formeln zu beweisen:
(a) $R(x,c) \to \exists y \forall x R(x,y)$
(b) $\forall x P(x) \to \exists x P(x)$
(c) $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \vee \forall x(\neg P(x) \wedge \neg Q(x))$

Aufgabe 2:
(a) Ein erststufiges Tableau T heißt 'atomar geschlossen', falls zu jedem Zweig z von T eine atomare Formel ϕ_z so existiert, dass sowohl ϕ_z als auch $\neg\phi_z$ zu z gehören. Zeige: Existiert ein geschlossenes Tableau für die Menge S erststufiger Formeln, so existiert auch ein atomar geschlossenes Tableau für S.
(b) Eine Anwendung der Resolutionsregel heißt 'atomar', falls über eine atomare Formel resolviert wird. Zeige: Hat ϕ einen Resolutionsbeweis, so hat ϕ auch einen Resolutionsbeweis, in dem alle Anwendungen der Resolutionsregel atomar sind.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es sei $\mathcal{L}_{\mathrm{A}}$ die Sprache der Arithmetik. $\mathcal{L}_{\mathrm{A}}$ hat zwei Konstantenzeichen $0, 1$, die zweistelligen Relationszeichen $<$ und $=$ sowie die zweistelligen Funktionszeichen $+$ und $\cdot$. Die Elemente von $\mathcal{L}_{\mathrm{A}}$-Strukturen nennen wir 'Zahlen'.
(a) Formulieren Sie folgende Aussagen in $\mathcal{L}_{\mathrm{A}}$:

1. Keine Zahl ist kleiner als 0.
2. Zwischen einer Zahl z und $z+1$ liegt keine weitere Zahl.
3. Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen zusammen mit den üblichen Bedeutungen von $0, 1, <, =, \cdot, +$ heißt 'Standardmodell der Zahlentheorie'. Es sei TA[1] die Menge aller $\mathcal{L}_{\mathrm{A}}$-Sätzen, die im Standardmodell wahr sind. Außerdem sei c ein neues Konstantenzeichen. Für $n \in \mathbb{N}$ benutzen wir n^* als Abkürzung für $\underbrace{1+1+...+1}_{n\times}$.
(b) Zeige: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathrm{TA} \cup \{c > i^* : i \leq n\}$ erfüllbar.
(c) Zeige: $\mathrm{TA}^+ := \mathrm{TA} \cup \{c > i^* : i \in \mathbb{N}\}$ ist erfüllbar.
(d) Es sei M eine $\mathcal{L}_{\mathrm{A}}$-Struktur, in der TA^+ erfüllt ist. Zeige: Es existiert ein $e \in M$ so, dass in M gilt: $e > n^*$ und $e + n^* < c$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bei jeder Aufgabe sind, wenn nichts anderes gesagt ist, bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 26.07.2017 vor der Vorlesung in den Briefkasten Ihrer Übungsgruppe.

[1] Für 'true arithmetic'.