Fachbereich Mathematik und Statistik SS 2017
der Universität Konstanz 26.04.2017
Dr. Merlin Carl Zettel 1
Gabriel Lehericy

Übungen zur Mathematischen Logik

Aufgabe 1:

(a) Zeige: Jeder binäre boolsche Operator ist durch $\uparrow$ ausdrückbar.

(b) Zeige: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist jeder n-stellige boolsche Operator durch $\uparrow$ ausdrückbar.

Aufgabe 2:

(a) Zeige: Wenn $P \in \mathcal{A}$ weder atomar noch von einer der Formen $\neg X$, $(X \circ Y)$ mit $X, Y \in \mathcal{A}$ ist, so besitzt $\mathcal{A} \setminus \{P\}$ alle definierenden Eigenschaften von $\mathcal{A}$. Folgere, dass jedes $P \in \mathcal{A}$ von einer dieser Formen ist.

(b) Zeige: Kein echtes Anfangsstück eines Elementes von $\mathcal{A}$ liegt in $\mathcal{A}$.

(c) Zeige: Ist $A \in \mathcal{A}$ von der Form $(X \circ Y)$, so sind X, Y und $\circ$ eindeutig bestimmt.

(d) Zeige nun, dass jedes Element von $\mathcal{A}$ entweder atomar oder von genau einer der Formen $\neg X$, $X \circ Y$ mit eindeutig bestimmten $X, Y \in \mathcal{A}$ und $\circ$ ist.

Zusatzaufgabe für Interessierte:

(a) Es sei $\circ : \{f, t\} \times \{f, t\} \to \{f, t\}$ ein binärer boolscher Operator. Zeige: Genau dann existiert ein wohlgeformter Ausdruck $\phi(A)$ in einer aussagenlogischen Variablen A und mit $\circ$ als einzigem Operator so, dass $\phi(A) \equiv \neg A$ eine Tautologie[1] ist, wenn $f \circ f = t$ und $t \circ t = f$.

Es sei nun $\circ$ ein binärer boolscher Operator mit $f \circ f = t$ und $t \circ t = f$.

(b) Zeige: Ist außerdem $t \circ f = t$ und $f \circ t = f$, so gilt für jeden wohlgeformten Ausdruck $\phi(A, B)$ in den aussagenlogischen Variablen A, B und mit $\circ$ als einzigem Operator, dass $\phi(A, B)$ für genau zwei Belegungen von A und B mit Wahrheitswerten den Wahrheitswert t und für die beiden anderen den Wahrheitswert f annimmt.

Zeige weiter, dass das gleiche gilt, wenn stattdessen $t \circ f = f$ und $f \circ t = t$ gilt.

(c) Folgere: Ist $\circ$ ein binärer boolscher Operator, der allein ausreicht, um alle anderen binären boolschen Operatoren auszudrücken, so ist $\circ = \downarrow$ oder $\circ = \uparrow$.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 03.05.2017 vor der Vorlesung in den Briefkasten Ihrer Übungsgruppe.

[1] D.h. $\phi(A)$ und $\neg A$ haben unabhängig vom Wahrheitswert von A denselben Wahrheitswert.