Fachbereich Mathematik und Statistik SS 2017
der Universität Konstanz 03.05.2017
Dr. Merlin Carl Zettel 2
Gabriel Lehericy

Übungen zur Mathematischen Logik

Aufgabe 1:

Es sei $F(P) \in \mathcal{A}$ Zeige: Sind $F(T)$ und $F(\perp)$ Tautologien, so auch $F(P)$.

Aufgabe 2:

Es sei $X \in \mathcal{A}$ so, dass X weder T noch $\perp$ und als einzigen Operator $\equiv$ enthält (also insbesondere kein Negationszeichen). Zeige: Genau dann ist X eine Tautologie, wenn jede aussagenlogische Variable eine gerade Anzahl von Malen in X vorkommt.

Aufgabe 3: Benutze Königs Lemma, um folgende Aussagen zu beweisen: (20 Punkte)

(a) Eine endliche 0-1-Folge f heißt 'stotterfrei', falls es kein Teilstück (also eine Folge von in f direkt aufeinander folgenden Zeichen) s von f so gibt, dass s aus drei Wiederholungen derselben Folge besteht. So ist z.B. 000110110110011001 nicht stotterfrei, da nach dem zweiten Zeichen das Teilstück 011011011 kommt, die aus drei Wiederholungen von 011 besteht. Dagegen ist 0110010011 stotterfrei. Zeige: Existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine stotterfreie Folge der Länge n, so existiert auch eine unendliche stotterfreie 0-1-Folge.

(b) Zeige: Zu jeder unendlichen Folge reeller Zahlen aus dem Einheitsintervall $[0, 1]$ existiert eine konvergente Teilfolge.[1]

(c) Ein 'Kacheltyp' ist ein Quadrat mit Seitenlänge 1, das durch seine beiden Diagonalen in vier Dreiecke geteilt wird; diese vier Dreiecke sind jeweils in einer von endlich vielen Farben gefärbt. Gegeben ist nun eine endliche Menge von Kacheltypen und ein beliebig großer Vorrat an Kacheln zu jedem dieser Typen. Eine 'Kachelung' einer Fläche entsteht, wenn man die Fläche vollständig (und überlappungsfrei) mit Kacheln bedeckt, wobei zwei Kacheln, die an einer Kante aneinander stoßen, dort dieselbe Farbe haben müssen.

Zeige: Ist es mit dem Kachelvorrat möglich, jedes $m \times n$-Rechteck zu kacheln, so existiert eine Kachelung für die gesamte Ebene.

Zusatzaufgabe für Interessierte: (20 Punkte)

(a) Ein automatisches Auskunftssystem zur Semesterplanung enthält neben Basisfakten (z.B. zu Lehrveranstaltungen, Zeiten, Räumen, Voraussetzungen und zu erreichenden ECTS-Punkten) auch einige Regeln wie etwa 'finden Veranstaltungen V_1 und V_2 gleichzeitig statt, können nicht beide belegt werden'. Das System soll Fragen beantworten wie 'Kann ich im kommenden Semester die

[1]Tipp: Betrachte einen Baum, dessen Knoten die Intervalle der Form $[k \cdot 2^{-n}, (k+1) \cdot 2^{-n}]$ mit $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq k < 2^n$ sind, die unendlich viele Folgenglieder enthalten. Diese Intervalle entstehen durch fortgesetztes Halbieren des Einheitsintervalls. Verbinde ein solches Intervall mit einer oder beiden seiner Hälften, je nachdem, ob sie unendliche viele Folgenglieder enthalten und benutze Königs Lemma.

Veranstaltungen xyz besuchen?'. Da sich Raum-, Zeit- und Lehrpläne bisweilen ändern und nicht immer alle Informationen rechtzeitig eingetragen werden, wird es häufig vorkommen, dass eine wichtige Information zum Zeitpunkt einer Abfrage nicht zur Verfügung steht. In diesem Fall soll die Rückmeldung erfolgen, dass die Antwort 'unbekannt' ist. Das System sollte also neben den Wahrheitswerten 'wahr' (W) und 'falsch' (F) noch über einen weiteren Wahrheitswert 'unbekannt' (U) verfügen. Erweitern Sie die Wahrheitstafeln für die aussagenlogischen Junktoren $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\equiv$ und $\neg$ auf die Wahrheitswertmenge $\{W, F, U\}$. Begründen Sie Ihre Entscheidungen; falls es an einer Stelle mehrere sinnvolle Möglichkeiten zu geben scheint, weisen Sie darauf hin.

(b) Die Datenbasis eines anderen automatischen Auskunftssystems zu aktuellen Wirtschaftsnachrichten speist sich durch automatische Informationsgewinnung ('text mining') aus 10 verbreiteten deutschen Tageszeitungen. Aufgrund verschiedener Ansichten und Einschätzungen sowie unterschiedlich gründlicher Recherche wird es bisweilen vorkommen, dass sich die Tageszeitungen bezüglich der Bewertung einer Aussage unterscheiden. Das Auskunftssystem sollte also mit folgenden Wahrheitswerten umgehen können: wahr (W), falsch (F), unbekannt (U) sowie 'kontrovers' (K), wobei 'kontrovers' bedeutet, dass die Aussage A von mindestens einer Zeitung als wahr und von mindestens einer als falsch bezeichnet wird. Geben Sie wiederum die entsprechenden Erweiterungen der Wahrheitstafeln an. Begründen Sie Ihre Entscheidungen; falls es an einer Stelle mehrere sinnvolle Möglichkeiten zu geben scheint, weisen Sie darauf hin.

(c) Viele gängige Alltagsbegriffe erlauben keine sinnvolle und eindeutige Unterscheidung zwischen Objekten, auf die sie zutreffen und solchen, auf die sie nicht zutreffen, z.B. 'groß', 'schnell', 'warm' oder 'laut'. Ein Ansatz, um Aussagen mit solchen Begriffen zu formalisieren ist die Einführung von 'Wahrheitsgraden': Ein Mensch von 1.20 ist zum Grad 0 groß, einer von 2.20 zum Grad 1, der Rest 'groß mit Grad x', wobei $0 < x < 1$. Als Wahrheitswerte sind nun also alle reellen Zahlen im Intervall $[0, 1]$ zugelassen; eine 'Wahrheitstafel' für einen Junktor $*$ ist jetzt eine Funktion $f_* : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ für $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \equiv\}$ bzw. $f_* : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ für $* = \neg$. Finden Sie geeignete Definitionen für die 'Wahrheitstafeln' $f_\neg$, $f_\wedge$, $f_\vee$, $f_\rightarrow$, $f_\equiv$ und begründen Sie Ihre Entscheidungen.

(d) Prüfen Sie von den folgenden Aussageformen nach, ob sie (1) mit den klassischen zweiwertigen Wahrheitstafeln, (2) mit den in (a) erarbeiteten 3-wertigen Wahrheitstafeln, (3) mit den in (b) erarbeiteten 4-wertigen Wahrheitstafeln und (4) mit den in (c) erarbeiteten Wahrheitsgradfunktionen Tautologien sind, d.h. unabhängig von den Wahrheitswerten der Aussagen A, B stets den Wahrheitswert 1 erhalten:
(i) $(A \equiv \neg\neg A)$, (ii) $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$, (iii) $(A \vee \neg A)$, (iv) $((A \wedge \neg A) \rightarrow B)$.

Bei jeder Aufgabe sind, wenn nichts anderes gesagt ist, bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 10.05.2017 vor der Vorlesung in den Briefkasten Ihrer Übungsgruppe.