Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Dr. Merlin Carl
Gabriel Lehericy

SS 2017
10.05.2017
Zettel 3

Übungen zur Mathematischen Logik

Aufgabe 1:
Eine Formel $X \in \mathcal{A}$ ist in 'Negationsnormalform' (NNF), falls jedes Negationszeichen in X direkt vor einer aussagenlogischen Variablen steht. So ist z.B. $((\neg P_0 \vee P_1) \to \neg P_2)$ in NNF, aber $\neg(P_0 \vee P_1)$ nicht.

Eine Formel $X \in \mathcal{A}$ heiße 'gut', falls es Formeln $A, B \in \mathcal{A}$ in NNF so gibt, dass $(X \equiv A)$ und $(\neg X \equiv B)$ Tautologien sind.

Zeige (z.B. mit struktureller Induktion): Jedes $X \in \mathcal{A}$ ist gut.

Aufgabe 2:

(a) Bringe folgende Formeln mithilfe des in der Vorlesung besprochenen Verfahrens in konjunktive Normalform:

(i) $(P \vee \neg P)$ (ii) $((P \downarrow Q) \uparrow \neg(P \downarrow Q))$

(b) Bringe folgende Formeln mithilfe des in der Vorlesung besprochenen Verfahrens in disjunktive Normalform:

(i) $(P \wedge \neg P)$ (ii) $((P \leftarrow (Q \uparrow R)) \downarrow \neg P))$

Aufgabe 3: Die 'Tiefe' $h(X)$ eine Formel $X \in \mathcal{A}$ ist durch strukturelle Rekursion wie folgt definiert: Ist A eine aussagenlogische Variable, so ist $h(A) = h(\neg A) = h(\top) = h(\bot) = 0$, ferner $h(\neg T) = h(\neg \bot) = 1$. Weiter ist $h(\neg\neg X) = h(X) + 1$, $h(\alpha) = \max\{h(\alpha_1, \alpha_2\} + 1$ und $h(\beta) = \max\{\beta_1, \beta_2\} + 1$.

(a) Zeige: Für alle $X \in \mathcal{A}$ ist $r(X) \leq 2^{h(X)} - 1$

(b) Zeige, dass (a) optimal ist, dass also zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $X \in \mathcal{A}$ so existiert, dass $h(X) = n$ und $r(X) = 2^n - 1$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Zeige, dass das in der Vorlesung besprochene Verfahren zur Umwandlung in disjunkte Normalform unabhängig von den im Laufe des Verfahrens getroffenen Auswahlen von Teilformeln terminiert und ein korrektes Ergebnis liefert.

Bei jeder Aufgabe sind, wenn nichts anderes gesagt ist, bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 17.05.2017 vor der Vorlesung in den Briefkasten Ihrer Übungsgruppe.