Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Dr. Merlin Carl
Gabriel Lehericy

SS 2017
17.05.2017
Zettel 3

Übungen zur Mathematischen Logik

Aufgabe 1:

(a) Benutze die Tableau-Methode, um zu ermitteln, ob die folgenden aussagenlogischen Formeln Tautologien sind:

1. $((P_0 \to P_1) \wedge (P_1 \to P_2)) \to \neg(\neg P_2 \wedge P_0)$
2. $(P_0 \to (P_1 \to (P_0 \downarrow P_1)))$
3. $P \uparrow (P \uparrow (P \uparrow (P \uparrow P)))$

(b) Benutze die Tableau-Methode, um für folgende Mengen von Formeln eine erfüllende Belegung zu ermitteln oder zu beweisen, dass sie unerfüllbar sind:

1. $\{P_0, P_0 \to P_1, P_1 \to P_2, P_2 \to P_3, \neg P_3\}$
2. $\{P_{01} \vee P_{02}, P_{11} \vee P_{12}, P_{21} \vee P_{22}, P_{01} \uparrow P_{11}, P_{01} \uparrow P_{21}, P_{11} \uparrow P_{21}, P_{02} \uparrow P_{22}, P_{02} \uparrow P_{22}, P_{12} \uparrow P_{22}\}$

Aufgabe 2: Wir definieren eine Folge $(X_i : i \in \mathbb{N}_0$ von aussagenlogischen Formeln rekursiv durch $X_0 = P_0$ und $X_{n+1} = (X_n \wedge P_{n+1})$. Wir betrachten nun für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die Formel $Y_n = (X_n \vee \neg X_n)$. Unter der Länge eines Tableaubeweises verstehen wir die Anzahl der Knoten im zugehörigen Baum.

(a) Wie lang ist der kürzeste Tableau-Beweis für Y_n (in Abhängigkeit von n)? Wie viele Fälle muss man im Vergleich dazu in einer Wahrheitstafel betrachten?

(b) Wie lang ist der längste strikte Tableau-Beweis für Y_n (in Abhängigkeit von n)?

(c) Was passiert, wenn man in (b) die Striktheit aufgibt?

Zusatzaufgabe für Interessierte: (20 Punkte) Überlege dir geeignete Ein- und Ausgabeformate und schreibe ein Programm, das eine gegebene aussagenlogische Formel X (die die Junktoren $\neg, \vee, \wedge, \to, \leftarrow, \nrightarrow, \nleftarrow, \downarrow, \uparrow$ enthalten darf) in konjunktive Normalform überführt.

Teste dein Programm mit den Formeln $((P_0 \vee P_1) \uparrow (P_1 \downarrow (P_1 \wedge \neg P_2)))$ und $((P_0 \vee (P_1 \wedge \neg P_2)) \leftarrow \neg\neg\neg(\neg P_3 \leftarrow (P_1 \uparrow P_1)))$.

Zur Bearbeitung gehört neben einem lauffähigen Programm auch eine Erklärung, wie das Programm funktioniert und eine Begründung, warum es funktioniert. Als Programmiersprachen sind zugelassen Prolog, Matlab, Java und Python. Für diese Aufgabe stehen 2 Wochen Bearbeitungszeit zur Verfügung, Abgabe also bis zum 31.05.2017.

Bei jeder Aufgabe sind, wenn nichts anderes gesagt ist, bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 24.05.2017 vor der Vorlesung in den Briefkasten Ihrer Übungsgruppe.