Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Dr. Merlin Carl
Gabriel Lehericy

SS 2017
24.05.2017
Zettel 5

Übungen zur Mathematischen Logik

Aufgabe 1: Benutze die Resolutions-Methode, um zu ermitteln, ob (und ggf. zu beweisen, dass) die folgenden aussagenlogischen Formeln Tautologien sind:

1. $(\neg A \downarrow \neg B) \leftarrow \neg(A \uparrow B)$
2. $\neg((A \downarrow B) \downarrow (A \vee B))$
3. $((A \wedge B) \vee (D \leftarrow C)) \rightarrow ((A \vee (C \rightarrow D)) \wedge ((D \leftarrow C) \vee B))$

Aufgabe 2: Zeige: Ist $\mathcal{H}$ eine aussagenlogische Hintikka-Menge und $X \in \mathcal{A}$, so enthält $\mathcal{H}$ nicht sowohl X als auch $\neg X$. (Beachte, dass die Definition einer Hintikka-Menge das nur für atomare Formeln explizit fordert.)

Aufgabe 3: Benutze Tukeys Lemma, um folgende Aussagen zu beweisen:
(a) Jeder Vektorraum hat eine Basis.
(b) Jeder (endliche oder unendliche) zusammenhängende Graph besitzt einen aufspannenden Baum.[1]

Zusatzaufgabe für Interessierte: Eine Resolutionserweiterung R heißt erfüllbar, falls es eine Boolesche Bewertung gibt, die alle Zeilen von R auf w abbildet.
(a) Zeige: Ist R eine erfüllbare Resolutionserweiterung, und entsteht R' aus R durch Anwendung einer Resolutionserweiterungsregel oder der Resolutionsregel, so ist auch R' erfüllbar.
(b) Zeige: Ist $S \subseteq \mathcal{A}$ und existiert eine geschlossene Resolutionserweiterung für S, so ist S nicht erfüllbar.
(c) Folgere, dass für alle $X \in \mathcal{A}$ gilt: Ist $\vdash_{\text{pr}} X$, so ist X eine Tautologie.

Bei jeder Aufgabe sind, wenn nichts anderes gesagt ist, bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 31.05.2017 vor der Vorlesung in den Briefkasten Ihrer Übungsgruppe.

[1] Ein 'Graph' ist ein geordnetes Paar (X, E) von Mengen, wobei $E \subseteq \{\{x, y\} : x, y \in X \wedge x \neq y\}$. Anschaulich kann man sich X als eine Menge von Punkten ('Ecken') und E als eine Menge von Verbindungen vorstellen. Ein Graph heißt 'zusammenhängend', wenn man von jeder Ecke über eine Reihe von Verbindungen zu jeder anderen Ecke gelangen kann. Ein zusammenhängender Graph G heißt 'Baum', falls es keine Möglichkeit gibt, in G entlang der Verbindungen im Kreis zu laufen, ohne eine Verbindung zweimal zu benutzen. Ein Baum (X', E') heißt 'aufspannender Baum' des Graphen (X, E), falls $X = X'$ und $E' \subseteq E$.