Fachbereich Mathematik und Statistik der Universität Konstanz
Dr. Merlin Carl
Gabriel Lehericy

SS 2017
31.05.2017
Zettel 6

# Übungen zur Mathematischen Logik

**Aufgabe 1**: Eine Menge $S \subseteq \mathcal{A}$ heißt 'nach oben abgeschlossen', falls:

1. Ist $Z \in S$, so ist auch $\neg\neg Z \in S$.
2. Sind $\alpha_1, \alpha_2 \in S$, so ist auch $\alpha \in S$.
3. Ist $\beta_1 \in S$ oder $\beta_2 \in S$, so ist $\beta \in S$.

Zeige, dass jedes $S \subseteq \mathcal{A}$ eine $\subseteq$-minimale nach oben abgeschlossene Obermenge besitzt. Diese bezeichnen wir nun mit $S^u$.

**Aufgabe 2**: Es sei $S \subseteq \mathcal{A}$. Zeige:
(a) $(S^u)^u = S^u$.
(b) $S_1 \subseteq S_2$ impliziert $S_1^u \subseteq S_2^u$.
(c) $S^u$ und $S$ enthalten die gleichen Literale.
(d) Ist $\alpha \notin S$, so ist $\alpha \in S^u$ genau dann, wenn $\alpha_1 \in S^u$ und $\alpha_2 \in S^u$.

**Aufgabe 3**: Es sei $\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{P}(\mathcal{A})$. $\mathcal{C}$ heißt 'strikte' AKE, falls für alle $S \subseteq \mathcal{C}$ gilt:
(1) Ist $A$ aussagenlogische Variable, so ist nicht sowohl $A \in S$ als auch $\neg A \in S$.
(2) $\bot \notin S$, $\neg\top \notin S$.
(3) Ist $\neg\neg Z \in S$, so ist $(S \setminus \{\neg\neg Z\}) \cup \{Z\} \in \mathcal{C}$.
(4) Ist $\alpha \in S$, so ist $(S \setminus \{\alpha\}) \cup \{\alpha_1, \alpha_2\} \in \mathcal{C}$.
(5) Ist $\beta \in S$, so ist $(S \setminus \{\beta\}) \cup \{\beta_1\} \in \mathcal{C}$ oder $(S \setminus \{\beta\}) \cup \{\beta_2\} \in \mathcal{C}$.

(a) Es sei $\mathcal{C}$ eine strikte AKE, $\mathcal{C}^* := \{X \subseteq \mathcal{A} : \exists S \in \mathcal{C} : X \subseteq S^u\}$. Zeige, dass $\mathcal{C}^*$ eine AKE ist.
(b) Zeige: Ist $\mathcal{C}$ eine strikte AKE und ist $S \in \mathcal{C}$, so ist $S$ erfüllbar.

**Zusatzaufgabe für Interessierte**: Es seien $X, Y, Z \in \mathcal{A}$. $Z$ heißt 'Interpolant' für $X$ und $Y$, falls jede aussagenlogische Variable, die in $Z$ vorkommt, sowohl in $X$ als auch in $Y$ vorkommt und ferner $X \to Z$ und $Z \to Y$ Tautologien sind.

(a) Eine endliche Menge $S \subseteq \mathcal{A}$ heißt 'Craig-konsistent', falls $S_1, S_2 \subseteq S$ so existieren, dass $S_1 \cup S_2 = S$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ und so, dass $\langle S_1 \rangle \to \neg\langle S_2 \rangle$ **keinen** Interpolanten besitzt. Zeige, dass die Menge der Craig-konsistenten Mengen eine AKE ist.

(b) Beweise den Craigschen Interpolationssatz: Sind $X, Y \in \mathcal{A}$ so, dass $X \to Y$ eine Tautologie ist, so existiert ein Interpolant für $X$ und $Y$.

(Tipp: Nimm an, dass $X \to Y$ keinen Interpolanten hätte. Betrachte die Menge $\{X, \neg Y\}$ und benutze (a).)

(c) Es seien $X, Y \in \mathcal{A}$ so, dass keine aussagenlogische Variable sowohl in $X$ als auch in $Y$ vorkommt. Zeige (evtl. unter Benutzung des Craigschen Interpolationssatzes): Wenigstens eine der Formeln $\neg X$ bzw. $Y$ ist eine Tautologie.

Bei jeder Aufgabe sind, wenn nichts anderes gesagt ist, bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 07.06.2017 vor der Vorlesung in den Briefkasten Ihrer Übungsgruppe.