Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Dr. Merlin Carl
Gabriel Lehericy

SS 2017
21.06.2017
Zettel 9

Übungen zur Mathematischen Logik

Aufgabe 1: Es sei σ eine Substitution, ϕ eine (erststufige) Formel.

(a) Zeige: $\phi\sigma$ ist eine Formel.

(b) Zeige: Ist τ eine weitere Substitution und stimmen σ und τ auf den freien Variablen in ϕ überein, so ist $\phi\sigma = \phi\tau$.

(c) Zeige: ϕ ist genau dann ein Satz, wenn $\phi\tau = \phi$ für alle Substitutionen τ gilt.

Aufgabe 2: Es seien P ein einstelliges Relationszeichen, R ein zweistelliges Relationszeichen und c ein Konstantenzeichen. Entscheide (mit Beweis oder Gegenbeispiel), ob folgende Formeln gültig sind:

(a) $P(c) \to \exists x P(x)$

(b) $\forall x R(x, c) \to R(c, c)$

(c) $\exists x P(x) \to \forall x P(x)$

(d) $\exists x(P(x) \to \forall x P(x))$

(e) $\forall x \exists y R(x, y) \to \exists x \forall y R(x, y)$

(f) $\exists x \forall y R(x, y) \to \forall x \exists y R(x, y)$

Aufgabe 3: Es seien $\mathcal{L}$ und $\mathcal{L}'$ erststufige Sprachen, wobei jedes Symbol von $\mathcal{L}$ auch ein Symbol von $\mathcal{L}'$ ist. Ferner sei S eine Menge von $\mathcal{L}$-Formeln. Zeige: Genau dann ist S ein einem Modell für $\mathcal{L}$ erfüllbar, wenn S ein einem Modell für $\mathcal{L}'$ erfüllbar ist.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es sei R ein zweistelliges Relationszeichen, $\mathcal{L}$ die Sprache, die als einziges nichtlogisches Zeichen R enthält, und $n \in \mathbb{N}$. Zeige: Es existiert eine $\mathcal{L}$-Formel ϕ_n, die in einem Modell $\mathcal{M}$ für $\mathcal{L}$ genau dann erfüllbar ist, wenn der Grundbereich von $\mathcal{M}$ mindestens n Elemente enthält.

Bei jeder Aufgabe sind, wenn nichts anderes gesagt ist, bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe am 28.06.2017 vor der Vorlesung in den Briefkasten Ihrer Übungsgruppe.