Korrekturen Mengenlehre

Merlin Carl

17. Juli 2012

Zusammenfassung

Hier einige ergänzende Bemerkungen und Korrekturen zur Vorlesung und den Übungen.

1. Vorlesung: Wir hatten $[a, b] := \{\{a\}, \{\{b\}\}\}$ als Beispiel für eine inadäquate Formalisierung des geordneten Paars betrachtet. Beim Gegenbeispiel hierzu waren offenbar in der Vorlesung a und b vertauscht. Richtig sollte es lauten:

$$a = \{\{\emptyset\}\},\ b = \emptyset,\ a' = \{\emptyset\},\ b' = \{\emptyset\}.$$

Dann ist:

$$\begin{aligned} [a, b] = [\{\{\emptyset\}\}, \emptyset] = \{\{\{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}\}\} = \\ = \{\{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\} = [\{\emptyset\}, \{\emptyset\}] = [a', b'] \end{aligned}$$

aber $a \neq a'$.

Auf Zettel 2, Aufgabe 4 war eine Formel nicht richtig dargestellt. Die korrigierte Version ist nun oben verlinkt.

In Zettel 5, Aufgabe 4, muss es statt '$\omega + \omega = \{\omega + i | i \in \omega\}$' natürlich heißen: '$\omega + \omega = \bigcup\{\omega + i | i \in \omega\}$'

Zur Übungsgruppe vom 12.06.: Die explizite Darstellung der Bijektion zwischen $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{N}$ sollte natürlich lauten: $p(i, j) = \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i$.

In der Zusatzaufgabe von Zettel 10 muss es bei beiden Darstellungen für a_n statt $a_n = ...$ heißen: $a_n \leq ....$ Das Argument liefert nur eine obere Abschätzung, nicht den exakten Wert von a_n.
Diesen können wir auch ermitteln:

$a_0 = 1$, $a_{n+1} = 2^n$ für $n \in \omega$.
Beweisidee: Wir bauen die Reihenfolge der Summanden schrittweise auf und achten dabei darauf, wie die Summe sich verändert. Beginnen wir mit ω^n. Dann kann ω^{n-1} in der Summe rechts oder links von ω^n stehen. Offenbar ist jede Summe der einen Art von jeder der anderen unterschieden. Betrachten wir nun ω^{n-2}. ω^{n-2} kann in der Summe entweder rechts von allen größeren Potenzen von ω (also ω^n und ω^{n-1}) stehen oder links von mindestens einer davon. Wiederum sind alle Summen der ersten Art von allen der zweiten Art verschieden. Allgemein kann ω^i rechts von allen größeren Potenzen von ω stehen oder links von mindestens einer. Durch diese Entscheidungen ist die Summe am Ende eindeutig bestimmt. In jedem dieser $(n-1)$ Schritte haben wir 2 Möglichkeiten, also gibt es 2^{n-1} solche Summen.
Wir betrachten $n = 3$ als Beispiel:
(1) ω^3. ω^2 kann links oder rechts davon stehen:
(2) $\omega^2 + \omega^3 = \omega^3$ bzw. $\omega^3 + \omega^2$. In beiden Fällen kann ω^1 ganz rechts stehen oder eben nicht.
(3) $\omega^1 + \omega^2 + \omega^3 = \omega^2 + \omega^1 + \omega^3 = \omega^3$ und $\omega^2 + \omega^3 + \omega^1 = \omega^3 + \omega^1$ bzw. $\omega^3 + \omega^1 + \omega^2 = \omega^1 + \omega^3 + \omega^2 = \omega^3 + \omega^2$ und $\omega^3 + \omega^2 + \omega^1$.
Insgesamt erhalten wir also 4 verschiedene Summen.
Präzise läßt sich das am Besten durch einen Induktionsbeweis fassen:
Behauptung: Für alle $i \leq n$ ist die Anzahl verschiedener ordinaler Summen, die man durch Umordnung von $\{\omega^n, ..., \omega^{n-i}\}$ erhält, gleich 2^i.
Beweis: Klar für $i = 0$. Angenommen, das Resultat ist bekannt für $n > i = k$. Wir zeigen, dass es dann auch für $i = k + 1$ gilt.
Für jede der Summen aus den Summanden $\{\omega^n, ..., \omega^{n-i}\}$ können wir ω^{n-i-1} entweder links von einem der anderen Summanden platzieren, wodurch sich die Summen nicht ändert, oder rechts von allen anderen Summanden. Offenbar erreicht man auf diese Weise alle möglichen Summen aus den Summanden $\{\omega^n, ..., \omega^{n-i-1}\}$ und alle diese Summen sind verschieden. Ferner hat sich die Anzahl der Summen gegenüber der zu $\{\omega^n, ..., \omega^{n-i}\}$ gehörigen offenbar verdoppelt, nach Induktionsannahme erhalten wir also gerade 2^{i+1}.