Einige Lösungen zu Zettel 3

Merlin Carl

22. Mai 2012

Zusammenfassung

Hier stehen Lösungen zu den Aufgaben von Zettel 3, die wir in der Übung nicht mehr besprochen haben, also zu Aufgabe 4 a),b),d), Aufgabe 1 und der Zusatzaufgabe.

Bemerkung: In Aufgabe 3a) sollte das 'entweder' gestrichen werden.

Da Aufgabe 4 bei Aufgabe 1 sehr nützlich ist, stellen wir sie nach vorne.

Aufgabe 4:
a) Beh.: Seien α und β Ordinalzahlen, $\alpha < \beta$. Dann ist $V_\alpha \subset V_\beta$.
Beweis: Wir zeigen zunächst $\alpha \leq \beta \implies V_\alpha \subseteq V_\beta$. Für $\alpha = \beta$ ist sicherlich $V_\alpha \subseteq V_\alpha = V_\beta$.
Angenommen, es existieren Ordinalzahlen α, β mit $\alpha < \beta$ und $\neg V_\alpha \subseteq V_\beta$. Es sei β' das kleinste β derart, dass $\alpha < \beta'$ existiert mit $\neg V_\alpha \subseteq V_{\beta'}$. Nun sei außerdem α' das kleinste $\alpha < \beta'$ derart, dass $\neg V_{\alpha'} \subseteq V_{\beta'}$.
Wir machen nun eine Fallunterscheidung:
Fall 1: $lim(\beta')$. Nach Definition ist $V_{\beta'} = \bigcup_{\iota<\beta'} V_\iota$. Mit $\alpha' < \beta'$ ist also insbesondere $V_{\alpha'} \subseteq V_{\beta'}$, im Widerspruch zur Wahl von α' und β'.
Fall 2: β' Nachfolger und $lim(\alpha')$. Sei $x \in V_{\alpha'}$. Da $lim(\alpha')$, ist $V_{\alpha'} = \bigcup_{\iota<\alpha'} V_\iota$. Also existiert $\iota < \alpha'$ mit $x \in V_\iota$. Da α' minimal gewählt war mit $negV_{\alpha'} \subseteq V_{\beta'}$, folgt $V_\iota \subseteq V_{\beta'}$. Insbesondere folgt $x \in V_{\beta'}$. Da $x \in V_{\alpha'}$ beliebig war, folgt $\forall x(x \in V_{\alpha'} \implies x \in V_{\beta'})$, d.h. $V_{\alpha'} \subseteq V_{\beta'}$, im Widerspruch zur Wahl von α' und β'.
Fall 3: β' und α' sind Nachfolger. Sei etwa $\beta' = \delta+1$ und $\alpha' = \gamma+1$. Dann ist, wie man leicht nachprüft, $\gamma < \delta$. Nach Minimalität von α' und β' folgt also $V_\gamma \subseteq V_\delta$. Sei nun $x \in V_{\alpha'} = V_{\gamma+1} = \mathfrak{P}(V_\gamma)$, also $x \subseteq V_\gamma$. Dann $x \subseteq V_\gamma \subseteq V_\delta$, also $x \subseteq V_\delta$. Dann aber $x \in \mathfrak{P}(V_\delta) = V_{\delta+1} = V_{\beta'}$. Da x beliebig war, folgt wieder $\forall x(x \in V_{\alpha'} \implies x \in V_{\beta'})$, also $V_{\alpha'} \subseteq V_{\beta'}$, im Widerspruch zur Wahl von α' und β'.

In jedem Fall ergibt sich ein Widerspruch, also kann es solche α und β nicht geben. Wir wissen jetzt also: Sind α und β Ordinalzahlen, $\alpha \leq \beta$, so ist $V_\alpha \subseteq V_\beta$.
Es fehlt also noch: $\alpha < \beta \implies V_\alpha \neq V_\beta$. Aber $\alpha < \beta$ impliziert $\alpha + 1 \leq \beta$, also haben wir $V_\alpha \in \mathfrak{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1} \subseteq V_\beta$, d.h. $V_\alpha \in V_\beta$. Aber $V_\alpha \notin V_\alpha$: Mit dem Fundiertheitsaxiom sieht man das gleich, aber es folgt auch aus Aufgabenteil c), also $x \in y \implies rk(x) < rk(y)$, denn damit ist $rk(V_\alpha) < rk(V_\alpha)$, ein Widerspruch. Damit folgt $V_\alpha \in V_\beta - V_\alpha$, also $V_\alpha \neq V_\beta$.
b) Beh.: (Mit der Notation für Klassen aus der letzten Vorlesung können wir die Behauptung etwas kürzer formulieren:) Ist β Ordinalzahl, so ist $V_\beta \cap On = \beta$.
Beweis: Durch transfinite Induktion.
(1) Für $\beta = \emptyset$ haben wir $V_\beta \cap On = V_\emptyset \cap On = \emptyset \cap On = \emptyset = \beta$.
(2) Sei nun β Nachfolgerordinalzahl, etwa $\beta = \alpha + 1$. Nach Induktion ist $V_\alpha \cap On = \alpha$. Nach a) folgt also $\alpha \subseteq V_\alpha \subseteq V_{\alpha+1} = V_\beta$, also $\alpha \subseteq V_\alpha \cap On$. (Jedes Element einer Ordinalzahl ist selbst Ordinalzahl!) Damit folgt auch $\alpha \in \mathfrak{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1} = V_\beta$, also $\alpha \in V_\beta$. Damit $\alpha \subseteq V_\beta$ und $\alpha \in V_\beta$, also $\{\alpha\} \subseteq V_\beta$, und also auch $\beta = \alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\} \subseteq V_\beta$, ergo auch $\beta \subseteq V_\beta \cap On$.
Ferner: Ist $\gamma \in V_\beta \cap On$, so folgt $\gamma \subseteq V_\alpha$, also $\gamma \subseteq V_\alpha \cap On = \alpha$. Also $\gamma \leq \alpha$, da die Ordnungsrelation auf Ordinalzahlen gerade $\subseteq$ ist, d.h. $\gamma < \alpha$, d.h. $\gamma \in \alpha$. Also folgt $V_\beta \cap On \subseteq \beta$.
Zusammen haben wir $V_\beta \cap On = \beta$.
(3) Sei schließlich $lim(\beta)$. Dann ist $V_\beta = \bigcup_{\iota < \beta} V_\iota$. Ist $\iota \in \beta$, so ist (wg. $lim(\beta)$) auch $\iota + 1 < \beta$, also folgt nach der Induktionsannahme und Teil a):
$\iota \in V_{\iota+1} \cap On \subseteq V_\beta \cap On$, also $\iota \in V_\beta \cap On$. Da ι beliebig war, erhalten wir $\beta \subseteq V_\beta \cap On$.
Sei umgekehrt $\iota \in V_\beta \cap On$. Dann existiert $\gamma < \beta$ mit $\iota \in V_\gamma \cap On = \gamma$. Also $\iota \in \gamma \subset \beta$, d.h. $\iota \in \beta$. Da ι beliebig war, folgt auch $V_\beta \cap On \subseteq \beta$.
Zusammen erhalten wir $V_\beta \cap On = \beta$.
d)
(1) $x \subset y \implies rk(x) < rk(y)$ ist falsch. Man kann hierfür leicht ein Gegenbeispiel finden: Z.B. ist $\{\{\emptyset\}\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, aber $rk(\{\{\emptyset\}\}) = 2 = rk(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})$.
(2) $x \subseteq y \implies rk(x) \leq rk(y)$ ist richtig: Sei dazu $rk(y) = \beta$, also β minimal mit $y \in V_{\beta+1}$, d.h. β minimal mit $y \subseteq V_\beta$. Dann $x \subseteq y \subseteq V_\beta$, also $x \subseteq V_\beta$, also $x \in \mathfrak{P}(V_\beta) = V_{\beta+1}$, also $rk(x) \leq \beta = rk(y)$.

Aufgabe 1:
Beh.: Ist $\alpha \in On$, so ist $V_\alpha = \bigcup_{\iota<\alpha} \mathfrak{P}(V_\iota)$.
Beweis: Durch transfinite Induktion.

Sei $\alpha = 0$. Dann $V_0 = \emptyset = \bigcup_{\iota<0} \mathfrak{P}(V_\iota) = \bigcup_{\iota\in\emptyset} \mathfrak{P}(V_\iota)$.
Sei α Nachfolgerordinalzahl, etwa $\alpha = \beta+1$. Nach Induktionsannahme haben wir dann $V_\beta = \bigcup_{\iota<\beta} \mathfrak{P}(V_\iota)$. Nach Definition haben wir außerdem $V_\alpha = \mathfrak{P}(V_\beta)$. Für $\iota < \beta$ ist ferner $\iota + 1 \leq \beta < \alpha$, also $V_{\iota+1} \subseteq V_\alpha$ nach $4a$). Wir haben also $\mathfrak{P}(V_\iota) = V_{\iota+1} \subseteq V_\alpha$ für alle $\iota < \beta$, d.h. $\bigcup_{\iota<\beta} \mathfrak{P}(V_\iota) \subseteq V_\alpha$. Damit: $\bigcup_{\iota<\alpha} \mathfrak{P}(V_\iota) = \bigcup_{\iota<\beta} \mathfrak{P}(V_\iota) \cup \mathfrak{P}(V_\beta) = \bigcup_{\iota<\beta} \mathfrak{P}(V_\iota) \cup V_\alpha = V_\alpha$, wie gewünscht.
Sei schließlich $lim(\alpha)$. Dann ist mit $\iota < \alpha$ auch $\iota+1 \in \alpha$. Da ferner $V_\iota \subseteq V_{\iota+1}$ nach $4a$), ist $\bigcup_{\iota<\alpha} V_\iota = \bigcup_{\iota<\alpha} V_{\iota+1}$. Also erhalten wir: $V_\alpha = \bigcup_{\iota<\alpha} V_\iota = \bigcup_{\iota<\alpha} V_{\iota+1} = \bigcup_{\iota<\alpha} \mathfrak{P}(V_\iota)$, wie gewünscht.

Zusatzaufgabe:
Beh.: Sei $(\phi_i)_{i\in\omega}$ eine Aufzählung der $LAST$-Formeln in einer freien Variablen. Dann existiert keine $LAST$-Formel $\psi(n, x)$ derart, dass für $n \in \omega$ und x eine Menge stets $\phi_n(x) \leftrightarrow \psi(n, x)$.
Beweis: Angenommen, $\psi(n, x)$ wäre eine solche Formel. Wir betrachten die Formel $\Delta(x) := \neg\psi(x, x)$. $\Delta(x)$ ist sicher eine $LAST$-Formel mit einer freien Variablen. Also kommt sie auch in unserer Aufzählung der $LAST$-Formeln in einer freien Variablen vor, sei etwa $\Delta(x) = \phi_m(x)$. Dann haben wir: $\neg\psi(m, m) \leftrightarrow \Delta(m) \leftrightarrow \phi_m(m) \leftrightarrow \psi(m, m)$, ein Widerspruch. Folglich kann eine solche Formel ψ nicht existieren.

Bemerkung: Ein solches ψ nennt man 'Wahrheitsdefinition'. Das Konzept stellte den Versuch dar, den (philosophischen) Wahrheitsbegriff von Tarski zu formalisieren. Die in dieser Aufgabe aufgezeigte Undefinierbarkeit der Wahrheit zeigt, dass dieser Begriff jedenfalls für die Mengenlehre mit den Mitteln der Mengenlehre nicht ausdrückbar ist. Das gleiche Argument funktioniert im wesentlichen auch für jedes andere System der Prädikatenlogik erster Stufe, in dem sich die natürlichen Zahlen formalisieren lassen.

Diese Lösungen können Tippfehler enthalten. Fragen, Hinweise und Korrekturen bitte an merlin.carl@uni-konstanz.de.