

# Einige Lösungen zu Zettel 6

12. Juni 2012

## Zusammenfassung

Hier die Lösungen zu Aufgabe 3c) und der Zusatzaufgabe, die wir im Tutorium nicht mehr ausführlich besprechen konnten. Wenn etwas unklar ist oder ihr einen Fehler entdeckt, schreibt mir bitte an [merlin.carl@uni-konstanz.de](mailto:merlin.carl@uni-konstanz.de)

## 1 Aufgabe 3c)

**Behauptung:** In  $ZF$  folgt: Ist die Potenzmenge jeder wohlordenbaren Menge wohlordenbar, so ist jede Menge wohlordenbar.

**Beweis:** Angenommen, die Potenzmenge jeder wohlordenbaren Menge ist wohlordenbar. Es genügt, zu zeigen, dass jedes  $V_\alpha$  für  $\alpha \in On$  wohlordenbar ist: Denn sei  $x$  eine Menge, dann existiert  $\alpha \in On$  mit  $x \subseteq V_\alpha$ ; ist nun  $\leq$  eine Wohlordnung auf  $V_\alpha$ , so ist  $\leq \cap (x \times x)$  Wohlordnung auf  $x$ .

Wir wollen also zeigen, dass für jedes  $\alpha \in On$  eine Relation  $\leq_\alpha$  existiert derart, dass  $V_\alpha$  durch  $\leq_\alpha$  wohlgeordnet ist. Sei dazu  $\alpha$  minimal derart, dass  $V_\alpha$  nicht wohlordenbar. Dann unterscheiden wir zwei Fälle:

(1)  $\alpha$  ist Nachfolgerordinalzahl, etwa  $\alpha = \beta + 1$ .

Nach Minimalität von  $\alpha$  ist dann  $V_\beta$  wohlordenbar und nach Voraussetzung dann auch  $\mathfrak{P}(V_\beta) = V_\alpha$ , ein Widerspruch.

(2) Sei nun  $\alpha$  eine Limesordinalzahl.

Wir zeigen: Es existiert eine Folge  $(\leq_\beta \mid \beta < \alpha)$  derart, dass für jedes  $\beta < \alpha$  gilt, dass  $\leq_\beta$  Wohlordnung auf  $V_\beta$ .

(Wenn das gezeigt ist, können wir eine Wohlordnung  $\leq_\alpha$  auf  $V_\alpha$  wie folgt: Sind  $x, y \in V_\alpha$ , so sei  $x \leq_\alpha y$  gdw.  $rk(x) < rk(y)$  oder  $rk(x) = rk(y) \wedge x \leq_{rk(x)} y$ .)

Zum Beweis: Sei  $\kappa \in On$  minimal derart, dass kein  $f$  existiert mit  $f : \kappa \rightarrow V_\alpha$  injektiv. (Die Existenz eines solchen  $\kappa$  zeigen wir im Anschluß.)

$\kappa$  ist durch  $\in$  wohlgeordnet, also existiert nach Annahme eine Wohlordnung  $\leq_P$  auf  $\mathfrak{P}(\kappa)$ . Jetzt definieren wir  $\leq_\beta$  für  $\beta < \alpha$  rekursiv:

$\leq_0 = \emptyset$ .

Ist  $\lambda < \alpha$  eine Limesordinalzahl, so setzen wir für  $x, y \in V_\lambda$ :  $x \leq_\lambda y$  gdw.  $rk(x) < rk(y)$  oder  $rk(x) = rk(y) \wedge x \leq_{rk(x)} y$ .

Ist  $\beta < \alpha$  eine Nachfolgerordinalzahl, etwa  $\beta = \gamma + 1$ , so ist  $V_\beta = \mathfrak{P}(V_\gamma)$ . Nach Annahme ist  $V_\gamma$  wohlordenbar. Also existiert eine kleinste Ordinalzahl  $\delta$  derart, dass  $g$  existiert mit  $g : \delta \rightarrow V_\gamma$  bijektiv. Offenbar ist  $\delta < \kappa$ , denn sonst wäre  $g \upharpoonright \kappa$  Injektion von  $\kappa$  nach  $V_\alpha$ , ein Widerspruch. Sind nun  $x, y \in V_\beta$ , also  $x \subseteq V_\gamma$  und  $y \subseteq V_\gamma$ , so sei  $x \leq_\gamma y$  gdw.  $g^{-1}[x] \leq_P g^{-1}[y]$ .

Auf diese Weise ist nun  $\leq_\beta$  für jedes  $\beta < \alpha$  rekursiv definiert.

Es bleibt noch, zu zeigen, dass für jedes  $\alpha \in On$  ein  $\kappa \in On$  existiert mit der Eigenschaft, dass es keine Injektion von  $\kappa$  nach  $V_\alpha$  gibt.

Dazu bemerken wir zunächst, dass jede Relation  $R$  auf  $V_\alpha$  eine Menge von geordneten Paaren von Elementen von  $V_{\alpha+2}$  ist, d.h.  $R \subseteq \mathfrak{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$ , d.h.  $R \in \mathfrak{P}(V_{\alpha+1}) = V_{\alpha+2}$ . Insbesondere sind also alle Wohlordnungen von  $V_\alpha$  Elemente von  $V_{\alpha+2}$ , und damit ist nach [Aus] die Klasse  $C := \{R \mid R \text{ ist Wohlordnung auf } V_\alpha\}$  eine Menge. (Man kann sie nämlich aus  $V_{\alpha+2}$  aussondern.) Wir können in *LAST* leicht die Funktion  $otp$  definieren, die einer Wohlordnung  $(x, \leq)$  die eindeutige zu ihr isomorphe Ordinalzahl zuordnet. Nach [Ers] ist also  $otp[C]$  eine Menge von Ordinalzahlen. Also ist auch  $\bigcup otp[C]$  eine Ordinalzahl. Damit ist schließlich  $(\bigcup otp[C]) + 1$  eine Ordinalzahl, die zu keiner Wohlordnung in  $C$  isomorph ist und also keine Injektion nach  $V_\alpha$  zulässt.

## 2 Zusatzaufgabe

a) Es stehe nun 0 für rot und 1 für grün. Wie im Tipp unter der Aufgabenstellung vorgeschlagen, sei  $R$  ein Repräsentantensystem für die  $\sim$ -Äquivalenzklassen in  ${}^\omega\{0, 1\}$ . Ehe das Spiel beginnt, einigen sich die Hobbits auf ein solches Repräsentantensystem und merken es sich. Haben die Hobbits sich aufgestellt und Hüte erhalten, so entspricht die Verteilung der Hutfarben auf die Hobbits einer Funktion  $f : \omega \rightarrow \{0, 1\}$ . Der  $i$ -te Hobbit sieht die Werte von  $f$  an allen Stellen  $j$  mit  $j > i$  und kann daher feststellen, zu welcher  $\sim$ -Äquivalenzklasse  $f$  gehört. Es sei  $g$  der vorher gewählte Vertreter der  $\sim$ -Äquivalenzklasse von  $f$ .  $g$  unterscheidet sich also nur an endlich vielen Stellen von  $f$ . Antwortet also der  $j$ -te Hobbit mit  $g(j)$ , so werden höchstens endlich viele Hobbits eine falsche (von  $f$  abweichende) Antwort geben.

b) Auch diesmal einigen sich die Hobbits sich vor Spielbeginn auf ein Repräsentantensystem. Dann wird die Hutfarbenfolge  $f$  wieder nur an endlich vielen Stellen vom vorher gewählten Vertreter  $g$  für die  $\sim$ -Äquivalenzklasse von  $f$  abweichen. Außerdem legen sie folgendes fest: Sagt der Hobbit auf der

0-ten Position 'rot', so bedeutet das: 'Die Anzahl der Abweichungen unseres Vertreters von der tatsächlichen Hutfarbenfolge ab dem Hobbit an der Position 1 ist ungerade'; 'grün' hingegen soll bedeuten, dass diese Anzahl gerade ist. Beginnt das Spiel gibt zunächst der 0-te Hobbit geäß dieser Verabredung seine Antwort. Danach weiß also der 1-te Hobbit, ob  $\{i \in \omega \mid i > 0 \wedge g(i) \neq f(i)\}$  eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Elementen hat. Außerdem sieht er alle Werte  $f(i)$  mit  $i > 1$ . Er weiß also auch, ob  $\{i \in \omega \mid i > 1 \wedge g(i) \neq f(i)\}$  eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Elementen hat. Damit kann er nun leicht feststellen, ob er selbst zu den Ausnahmen gehört oder nicht: Sind die Paritäten verschieden, gehört er zu den Ausnahmen, sonst nicht. Also kann er seine Hutfarbe korrekt feststellen. Haben auf diese Weise die ersten  $i$  Hobbits korrekt geantwortet, kann der  $i$ -te Hobbit auf die gleiche Weise seine Hutfarbe feststellen.

Allerdings sollte sich bei dieser Methode besser keiner der Hobbits vertun...