Aufgaben zu Verallgemeinerung, Spezialisierung und Analogie

Aufgabe 1:
(a) Es seien a, b, c, d, e reelle Zahlen. Zeige: Ist $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 = ab+bc+cd+de+ea$, so ist $a = b = c = d = e$. Formuliere eine allgemeinere Behauptung und beweise sie.
(b) Es seien $a_1, ..., a_n$ sowie $b_1, ..., b_n$ von 0 verschiedene reelle Zahlen. Zeige: Existieren reelle Zahlen A und B so, dass $(a_1x+b_1)^2+...+(a_nx+b_n)^2 = (Ax+B)^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so ist $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$.

Aufgabe 2: Berechne die folgenden Summen durch geeignete Manipulation der binomischen Formel $(1+x)^n = \Sigma_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i$:

(a) $\Sigma_{i=1}^{n} i^2\binom{n}{i}$

(b) $\Sigma_{i=1}^{n} 3^i\binom{n}{i}$

(c) $\Sigma_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1}\binom{n}{i}$

(d) $\Sigma_{i=1}^{n} (2i+1)\binom{n}{i}$

Aufgabe 3: Im Folgenden sind jeweils reelle $n \times n$-Matrizen A_n in Abhängigkeit von n gegeben. Bestimme jeweils $\lim_{n\to\infty}\det(A_n)$.
(a) $A_{ij} = (i+j)^2$ für $1 \leq i, j \leq n$
(b) $A_{ij} = p(ix+j)$ für $1 \leq i, j \leq n$, wobei $x \in \mathbb{R}$ beliebig ist und p ein Polynom zweiten Grades mit reellen Koeffizienten bezeichnet
(c) $A_{ij} = p(ix+j)$ für $1 \leq i, j \leq n$, wobei $x \in \mathbb{R}$ beliebig ist und p ein beliebiges Polynom mit reellen Koeffizienten bezeichnet
(d) $A_{ij} = p(ix+j)$ für $1 \leq i, j \leq n$, wobei $x \in \mathbb{C}$ beliebig ist und p ein beliebiges Polynom mit komplexen Koeffizienten bezeichnet

Aufgabe 4: Der fünfdimensionale Einheitswürfel W_5 hat als Eckpunkte alle Elemente des $\mathbb{R}^5$, deren Koordinatendarstellung bezüglich der Standardbasis nur 0 und 1 enthalten. Eine Kante verbindet zwei Ecken, die sich nur in einer Koordinate unterscheiden.
(a) Bestimme die Anzahl der Kanten des W_5.
(b) Die fünfdimensionale Kugel K mit Mittelpunkt $z \in \mathbb{R}^5$ und Radius d besteht aus allen Punkten, die von z in $\mathbb{R}^5$ höchstens (euklidischen) Abstand d haben. Bestimme Radius und Mittelpunkt einer fünfdimensionalen Kugel, auf deren Rand sämtliche Eckpunkte des W_5 liegen.
(c) Ist g eine Gerade im $\mathbb{R}^5$ und $P \in \mathbb{R}^5$, so erhält man P_g, das Bild von P unter der Spiegelung an g, in dem man denjenigen Punkt Q auf g sucht, der von p den kleinsten

Abstand hat, und dann die Strecke $\overline{PQ}$ über Q hinaus um diesen Abstand verlängert. (Liegt P auf g, so ist $P_g = O$.) Eine Gerade g heißt Symmetrieachse des W_5, wenn für jeden Eckpunkt P des W_5 auch P_g ein Eckpunkt des W_5 ist. Wie viele Symmetrieachsen besitzt der W_5?

Aufgabe 5: Zeige, dass unendlich viele natürliche Zahlen der Form $6n - 1$ (mit $n \in \mathbb{N}$) Primzahlen sind.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!

Abgabe am 12.01.2016 im Seminar.