Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Merlin Carl

Aufgaben zu Beobachtung und Mustererkennung

Aufgabe 1: Bestimme alle Quadratzahlen, deren Dezimaldarstellung ausschließlich ungerade Ziffern enthält.

Aufgabe 2:
(a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei die reelle $n \times n$-Matrix A_n gegeben durch $A_{ij} = i+j$ für $1 \leq i, j \leq n$. Bestimme $\det(A_n)$ in Abhängigkeit von n.
(b) Für $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{R}$ sei die reelle $n \times n$-Matrix $A_n^{x,y}$ gegeben durch $A_{ij}^{x,y} = ix + jy$ für $1 \leq i, j \leq n$. Bestimme $\det(A_n^{x,y})$ in Abhängigkeit von n, x und y.

Aufgabe 3: Im Folgenden findest Du einige Vermutungen. Stelle geeignete Beobachtungen an, um ihre Richtigkeit zu prüfen. Diskutiere kurz, für wie stichhaltig Du deine Beobachtungen hältst: Würdest Du eher zu einem Beweis- oder Widerlegungsversuch tendieren? Würdest Du auf ihre Korrektheit wetten?[1]

(a) Die Fibonaccifolge ist gegeben durch $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Vermutung: Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ ist $ggT(F_n, F_m) = F_{ggT(n,m)}$.

(b) Ein Polyeder ist ein Festkörper, dessen Oberfläche aus n-Ecken besteht. Beispiele für Polyeder sind das Tetraeder, der Würfel und eine Pyramide. Vermutung: Ist E die Anzahl der Ecken, K die Anzahl der Kanten und F die Anzahl der Flächen eines Polyeders, so ist $E + F = K + 2$.

(c) Eine eine natürliche Zahl n heißt 'verdächtig', falls für alle zu n teilerfremden Zahlen a gilt: $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$. Vermutung: Alle verdächtigen Zahlen sind Primzahlen.

(d) Vermutung: Für alle natürlichen Zahlen n ist $n^2 + n + 41$ eine Primzahl.

(e) 'Ich habe die Vermutung, dass alle natürlichen Zahlen kleiner sind als 1.000.000.000. Ich habe systematische Experimente angestellt und u.a. die ersten 10.000.000 natürlichen Zahlen mit einem Computer überprüft, ohne ein Gegenbeispiel zu finden. Daher halte ich meine Vermutung für eindrucksvoll bestätigt. Wer diese Ansicht nicht teilt, sollte Beobachtungen in der Mathematik insgesamt keinen Wert beimessen.'
Diskutiere diese Aussage. Was spricht für, was gegen sie? Was - wenn überhaupt etwas - unterscheidet diesen Fall von den in (a)-(d) betrachteten?

[1] **Hinweis**: Für eine vollständige Bearbeitung ist es hier also nicht erforderlich, die Vermutungen definitiv zu entscheiden oder die richtigen zu beweisen.

Aufgabe 4: Gesucht sind die ganzzahligen Lösungen $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ der Gleichung

$$x^2 + xy - y^2 = 1.$$

(a) Finde einige Lösungen. Versuche, möglichst viele Zusammenhänge zwischen den Lösungen zu erraten.

(b) Beweise möglichst viele der in (a) erratenen Zusammenänge.

(c) Benutze (a), um eine unendliche Menge $A \subseteq \mathbb{Z}^2$ zu finden, von der die Beobachtungen aus (a) nahelegen, dass ihre sämtlichen Elemente Lösungen sind. Prüfe deine Vermutung durch weitere Beobachtungen und verbessere sie solange, bis du auf keine Gegenbeispiele mehr stößt.

(d) Beweise, dass alle Elemente der in (c) erhaltenen Menge A tatsächlich Lösungen sind.

(e) Stelle eine Vermutung bezüglich der gesamten Lösungsmenge auf.

(f) Beweise die in (e) erhaltene Vermutung.

Abgabe am 08.12.2015 im Seminar.