

Aufgaben zum Extremalprinzip

Aufgabe 1: Fünfzehn Papierstücke verschiedener Größen und Formen liegen auf einem Schreibtisch und bedecken ihn vollständig. Die Stücke können einander überlappen und auch über den Rand des Tisches hinaus ragen. Zeige, dass es möglich ist, fünf der Blätter so zu entfernen, dass die verbleibenden 10 Blätter noch mindestens $\frac{2}{3}$ des Schreibtisches bedecken.

Aufgabe 2: Die natürlichen Zahlen $1, 2, \dots, n^2$ sind (ohne Wiederholung) in beliebiger Reihenfolge in die Kästchen eines $n \times n$ -Quadrates eingetragen. Zwei Felder ‘berühren’ einander, wenn sie eine gemeinsame Kante oder einen gemeinsamen Eckpunkt haben (also horizontal, vertikal oder diagonal ‘benachbart’ sind). Zeige: Es existieren zwei Felder, die einander berühren und für die die (betragsmäßige) Differenz der in sie eingetragenen Zahlen $\geq n + 1$ ist.

Aufgabe 3: Es sei p ein Polynom mit reellen Koeffizienten so, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, dass $p(x) + p'(x) \geq 0$. Zeige: Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $p(x) \geq 0$.

Aufgabe 4: Es sei $n \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und B die Menge aller $b \in \mathbb{R}^n$, für die es genau einen Punkt $a_0 \in A$ gibt mit $|a_0 - b| = \inf_{a \in A} |a - b|$. Zeige, dass B dicht in $\mathbb{R}^n$ ist.

Abgabe am 01.12.2015 im Seminar.