Aufgaben zur Graphentheorie

Aufgabe 1: Zeige: Jeder simple (endliche) Graph G enthält zwei Ecken mit gleichem Grad.

Aufgabe 2:

(a) Zeige: Zu $k, l, m \in \mathbb{N}$ existiert stets ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass jede Färbung der Kanten des vollständigen Graphen K_n in den Farben rot, grün und blau einen roten K_k oder einen grünen K_l oder einen blauen K_m als Teilgraphen enthält.

(b) Verallgemeinere (a) auf eine beliebige (endliche) Anzahl von Farben.

Aufgabe 3:

Es sei G ein gerichteter Graph. Ein gerichteter Eulerkreis in G ist ein Kantenzug von G, der jede Kante $k = (v_1, v_2)$ von G genau einmal durchläuft, und zwar in der Richtung $v_1 \to v_2$. Der Ausgrad einer Ecke v in G ist die Anzahl der in G von v ausgehenden Kanten, also $|\{w \in V : (v, w) \in E\}$; entsprechend ist der Ingrad von v die Anzahl der in v hinein laufenden Kanten, d.h. $|\{(w \in V : (w, v) \in E\}$.

(a) Zeige: Ist $j \geq 1$ und ist $G = (V, E)$ ein zusammenhängender, gerichteter Graph, in dem für jede Ecke der Aus- und Ingrad gleich j sind, so enthält G einen gerichteten Eulerkreis.

Ordnet man die Ziffernfolge 01110100 im Kreis an, so kommt unter den acht Teilfolgen von drei aufeinanderfolgenden Elementen jede der acht 0-1-Folgen der Länge 3, also jede der Folgen 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 genau einmal vor.

(b) Zeige: Ist $n \geq 3$ eine natürliche Zahl, so existiert eine 0-1-Folge s_n der Länge 2^n so, dass unter den 2^n Teilfolgen von n aufeinanderfolgenden Elementen von s_n jede 0-1-Folgen der Länge n genau einmal vorkommt.

Zusatz: Zeige: Sind $k, n \in \mathbb{N}$, so existiert eine Folge $s_{k,n}$ von Elementen von $\{0, 1, ..., k-1\}$ der Länge k^n derart, dass unter den k^n Teilfolgen von n aufeinanderfolgenden Elementen von $s_{k,n}$ jede Folge der Länge n von Elementen von $\{0, 1, ..., k-1\}$ genau einmal vorkommt.

Abgabe am 26.01.2016 im Seminar.