Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Merlin Carl

WS 14/15
03.11.2015
Aufgaben zum Invarianzprinzip

Aufgaben zum Invarianzprinzip

Aufgabe 1: Drei faule Ameisen sitzen in der euklidischen Ebene auf den Punkten mit den Koordinaten $(0,0),(0,1)$ und $(1,1)$. Es bewegt sich nie mehr als eine Ameise zugleich, und wenn sich eine Ameise bewegt, läuft sie immer auf einer Geraden, die parallel zu der Geraden ist, die die beiden anderen Ameisen verbindet.

(a) Kann es passieren, dass sich zwei der Ameisen treffen (also die gleichen Koordinaten haben)?

(b) Kann es passieren, dass die Ameisen irgendwann die Punkte mit den Koordinaten $(0,0),(0,3)$ und $(1,1)$ einnehmen?

Aufgabe 2: Es sei $x_1 = 1997^{1998^{19999}}$, x_{n+1} die (dekadische) Quersumme von x_n. Finde $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Aufgabe 3: Es ist ein $m \times n$-Rechteck gegeben, in dessen Feldern reelle Zahlen stehen. In einem Zug darf man eine Zeile oder Spalte auswählen und dort die Vorzeichen aller Einträge wechseln. Ist es möglich, nach endlich vielen Zügen eine Konstellation zu erreichen, in der keine Zeilen- oder Spaltensumme noch negativ ist?

Aufgabe 4:

(a) Die natürlichen Zahlen von 1 bis n seien in eine Reihe geschrieben. In einem Zug darf man zwei benachbarte Zahlen vertauschen, wenn die linke größer ist als die rechte. Zeige, dass man nach endlich vielen Zügen einen Zustand erreicht, in dem kein weiterer Zug mehr möglich ist und beschreibe, wie dieser Zustand aussehen kann.

(b) Es seien $0 < a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ und $0 < b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n$ reelle Zahlen, ferner $\pi : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$ eine Permutation. Zeige: $\Sigma_{i=1}^n a_i b_{n-i} \leq \Sigma_{i=1}^n a_i b_{\pi(i)} \leq \Sigma_{i=1}^n a_i b_i$.

Abgabe am 10.11.2015 im Seminar.